חשבוניה

שיעור 1

פתרונות
וידאו
מלאים

נושאי השיעור

- קבוצות של מספרים
- סימונים
- ערך מוחלט
- קטעים
- אי שוויונות
- אינדוקציה
- הבינום של ניוטון

קישור
לאתר

קבוצות של מספרים

נסמן קבוצה ע"י סוגרים מסולסלות שבתוכן נרשום את אברי הקבוצה.

דוגמאות:

$$\{1,2,3\}, \{x: 1 < x < 2\}, \{x| \text{חיובי וזוגי } x\}$$

קבוצות מיוחדות של מספרים

$\mathbb{N}$ - המספרים הטבעיים (שלמים חיוביים)

$\mathbb{Z}$ - המספרים השלמים

$\mathbb{Q}$ - המספרים הרציונליים (מנה של מספרים שלמים עם מכנה שונה מאפס)

$\mathbb{R}$ - המספרים הממשיים

$\mathbb{C}$ - המספרים המרוכבים (א נדבר עליהם בקורס)

סימונים

שייכות $a \in A$

חיתוך $A \cap B$ איחוד $A \cup B$

קבוצה ריקה $\emptyset$

קיים $\exists$ לכל $\forall$

$support@hesbonia.co$

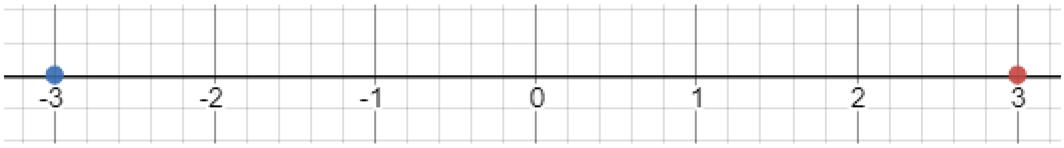
ערך מוחלט

הע״מ של x מסומן ב $|x|$ ומוגדר $x = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

משמעות גאומטרית של ע״מ : מרחקו של המספר מהאפס.

דוגמה 1 :

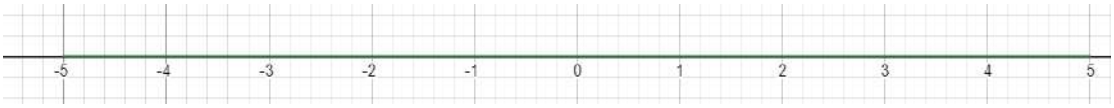
$$|x| = 3$$



ולכן הפתרון הוא $x = \pm 3$

דוגמה 2 :

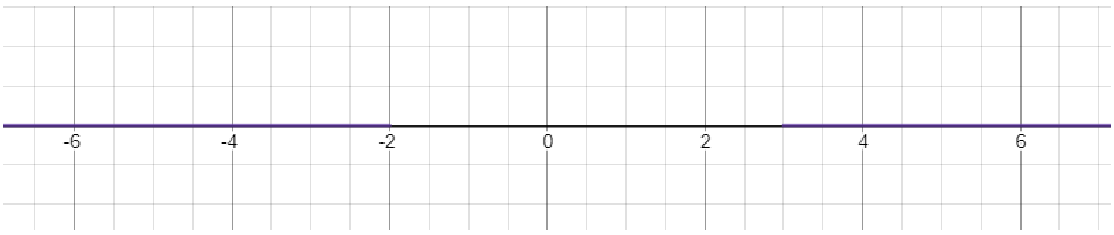
$$|x| \leq 5$$



ולכן הפתרון הוא : $-5 < x < 5$

דוגמה 3 :

$$|x| \geq 2$$



ולכן הפתרון הוא : $-2 > x,\ 2 < x$

תרגיל

$$|x+6| < 3$$

פתרון

זהו תרגיל בסגנון של דוגמה 2 (ע"מ קטן ממספר) ולכן נדרוש שיתקיים

$$-3 < x+6 < 3$$

ניתן לפתור כשני אי שוויונות או להוסיף 6 לכל אחד משלושת הביטויים. בסופו של דבר נקבל:

$$-9 < x < -3$$

קישור לאתר

תכונות ע"מ

1. $|x| = |-x|$
2. $|x| \geq x$
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad y \neq 0$
5. אי שוויון המשולש

$$(*) \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

קישור לאתר

$$(**) \quad |x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$$

הוכחות (*):

הוכחות (**):

קטעים

קטע פתוח $(-2,3)$ צורת רישום נוספת $x \in (-2,3)$ עוד צורת רישום נוספת $-2 < x < 3$

קטע סגור $[-2,3]$ צורת רישום נוספת $x \in [-2,3]$ עוד צורת רישום נוספת $-2 \le x \le 3$

קטע חצי סגור חצי פתוח $(-2,3], [-2,3)$.

תרגיל 1

$$\left|\frac{x-4}{x+5}-2\right| > 1$$

מכנה משותף

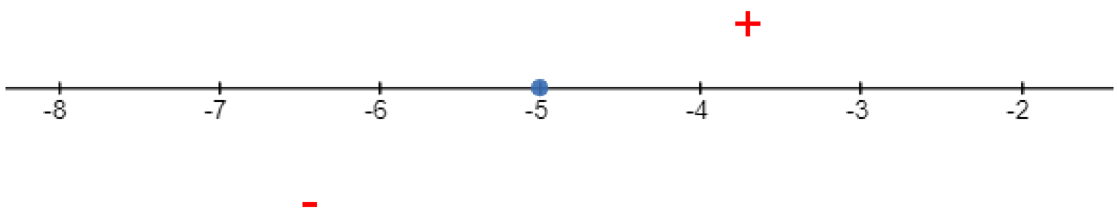
$$1 < \left|\frac{x-4-2(x+5)}{x+5}\right| = \left|\frac{-x-14}{x+5}\right| = \left|\frac{x+14}{x+5}\right|$$

נפצל לשני אי שוויונות

$$1 < \frac{x+14}{x+5} \quad \text{או} \quad -1 > \frac{x+14}{x+5}$$

$$1 < \frac{x+14}{x+5} \quad \rightarrow \quad 0 < \frac{x+14}{x+5} - 1 = \frac{9}{x+5}$$

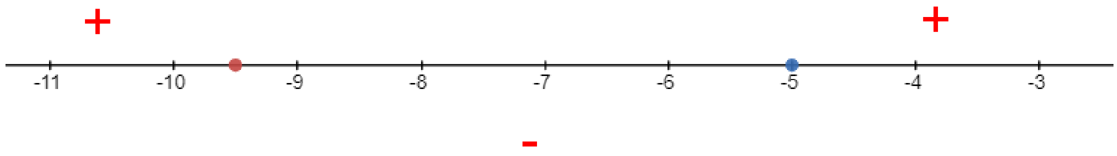
נשתמש בשיטת הנחש (נרשום את המאפסים של המונה והמכנה על ציר המספרים ונקבע את הסימן באחד התחומים



לסיכום הפתרון הוא: $x > -5$.

האי שוויון השני:

$$-1 > \frac{x+14}{x+5} \quad \to \quad 0 > 1 + \frac{x+14}{x+5} = \frac{2x+19}{x+5}$$



לסיכום הפתרון הוא: $-9.5 < x < -5$

בין שני האי שוויונות יש או ולכן איחוד התחומים הוא: $x > -5$ או $-9.5 < x < -5$

דרך נוספת לרשום את הפתרון: $(-9.5, -5) \cup (-5, \infty)$

תרגיל 2

הוכיחו כי אם $|x-4| < 1$ אז $\left|\frac{x^2-6x+8}{x+4}\right| < \frac{3}{7}$

פתרון

$$\left|\frac{x^2-6x+8}{x+4}\right| = \left|\frac{(x-4)(x-2)}{x+4}\right| = \frac{|x-4| \cdot |x-2|}{|x+4|}$$

נשתמש בנתון

$$1 > |x-4|$$

$$-1 < x-4 < 1$$

$$3 < x < 5$$

נבטא כל ביטוי בשבר

$$1 < x-2 < 3, \qquad\qquad 7 < x+4 < 9$$

כדי להגדיל את הביטוי המקורי נקטין את המכנה ונגדיל את המונה ונקבל:

$$\frac{|x-4|\cdot|x-2|}{|x+4|}\leq\frac{1\cdot 3}{7}=\frac{3}{7}$$

קישור לאתר

תרגיל 3

$$|x|+|x-1|<5$$

נבטא את האי שוויון בלי ע"מ. הע"מ מתאפסים ב $x=0,1$ לכן נחלק את הבעיה שלנו לשלושה תחומים.

בתחום $x<0$ האי שוויון הופך ל $-x-(x-1)<5$

$$-2x<4$$

$$x>-2$$

לכן הפתרון בתחום הזה הוא: $-2<x<0$

בתחום $0\leq x\leq 1$ האי שוויון הופך ל $x-(x-1)<5$

$$1<5$$

זהו פסוק אמת, כל ערכי ה x מתאימים, לכן הפתרון בתחום הזה הוא: $0\leq x\leq 1$

בתחום $x>1$ האי שוויון הופך ל $x+(x-1)<5$

$$2x<6$$

$$x<3$$

לכן הפתרון בתחום הזה הוא: $0<x<3$

לסיכום, איחוד הפתרון הוא פתרון הבעיה המקורית ולכן הפתרון הוא: $-2<x<3$

קישור לאתר

אי שוויון הממוצעים

עבור $x, y > 0$ נגדיר $\frac{x+y}{2}$ להיות הממוצע החשבוני של שני המספרים. $\sqrt{xy}$ להיות הממוצע ההנדסי (הגאומטרי) שלהם. ו $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ להיות הממוצע ההרמוני.

מתקיים

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \le \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$

קישור לאתר

הוכחה

נוכיח את האי שוויון הימני

$$\sqrt{xy} \overset{?}{\le} \frac{x+y}{2}$$

$$2\sqrt{xy} \overset{?}{\le} x+y$$

2 האגפים חיוביים ולכן ניתן להעלות בריבוע

$$4xy \overset{?}{\le} x^2 + 2xy + y^2$$

$$0 \le x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

אי שוויון זה נכון לכל x, y ולכן הוכחנו את צד ימין.

הוכחת האי שוויון השמאלי

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \le \sqrt{xy} \quad \rightarrow \quad \frac{2xy}{x+y} \le \sqrt{xy} \rightarrow \frac{2xy}{\sqrt{xy}} \le x+y \rightarrow 2\sqrt{xy} \le x+y$$

ואת זה הוכחנו באי שוויון הקודם.

הכללה עבור n משתנים

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$$

קישור לאתר

אינדוקציה

אינדוקציה היא שיטת הוכחה לבעיות המכילות טענות במספרים טבעיים.

תרגיל

הוכיחו את אי שוויון ברנולי באינדוקציה

$$(1+x)^n \ge 1+nx, \qquad x \ge -1$$

פתרון

בסיס – נראה שהטענה נכונה עבור המספר הטבעי הקטן ביותר $n=1$

$$(1+x)^2 \ge 1+x$$

הנחה – לכל מס' טבעי קטן או שווה ל n מתקיים

$$(1+x)^n \ge 1+nx, \qquad x \ge -1$$

צעד – נראה שהטענה נכונה עבור $n+1$

צ"ל $$(1+x)^{n+1} \ge 1+(n+1)x, \;\; x \ge -1$$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \ge [1+nx](1+x) = 1+x(n+1)+\underbrace{nx^2}_{\text{אי שלילי}}$$

$$\ge \;\; 1+x(n+1)$$

קישור לאתר

תרגול עצמי

הוכיחו $ln(x^n) = nln(x),\ n \geq 2$

הוכחה באינדוקציה

קישור לאתר

הבינום של ניוטון

הבינום הוא נוסחה לביטוי $(a+b)^n$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

כאשר

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

המקדמים הבינומיאליים בתחילת וסוף הפיתוח מקיימים ($0! = 1$):

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

קישור לאתר

תרגיל

הוכיחו את אי שוויון ברנולי עבור $x \geq 0$ בעזרת הבינום של ניוטון.

פתרון

נציב $a = x, b = 1$ בבינום ונקבל:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} 1^k = \binom{n}{0} x^n 1^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} 1^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 1^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 1^n$$

$$= x^n + nx^{n-1} + \cdots + nx^1 + 1 \geq 1 + nx$$

קישור לאתר

תרגול עצמי

חשבו את $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

תשובה : 2^n.

קישור לאתר

משוואת ישר

בהינתן נקי (x_0, y_0) ושיפוע a קיים ישר יחיד בעל שיפוע זה העובר דרך הנקי הנתונה ומשוואתו :

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$