שיעור 5

נושאי השיעור

- רציפות
- אי רציפות
- משפט ערך הביניים
- משפטי ויירשטראס

קישור לאתר

רציפות

רציפות של פונקציה – אינטואיטיבית , פונקציה רציפה היא פונקציה שנוכל לייצר בלי להרים את היד.

הגדרה תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0 , כולל x_0, נאמר כי $f(x)$ רציפה ב - x_0 אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

הגדרה נאמר כי $f(x)$ רציפה, אם היא רציפה בכל x_0 בכל תחום הגדרתה.

הפונקציות האלמנטריות רציפות בתחום הגדרתן

תרגילים

קישור לאתר

1. עבור אילו ערכי $a \cancel{\in} \left(-\frac{1}{2}, 0\right]$ ו - b הפונקציה הבאה רציפה

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}} & |x| \le 2 \\ \dfrac{ax^2+b}{ax+1} & |x| > 2 \end{cases}$$

פתרון

(הדרישה $a \cancel{\in} \left(-\frac{1}{2}, 0\right]$ הכרחית, אחרת אם נבחר $a = -\frac{1}{3}$ ו - $x = 3$ והמכנה יתאפס.)

כדי ש $f(x)$ תהיה רציפה ב $x = 2$ נדרוש כי $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$. נחשב גבולות חד צדדיים.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{ax^2 + b}{ax + 1} = \frac{4a + b}{2a + 1}$$

$$f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{6 - 5x + x^2}} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{(2 - x)(2 + x)}}{\sqrt{(2 - x)(3 - x)}} =$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2 + x)}}{\sqrt{(3 - x)}} = \frac{2}{1} = 2$$

נדרוש

$$\frac{4a + b}{2a + 1} = 2$$

$$4a + b = 4a + 2$$

$$b = 2$$

כדי ש $f(x)$ תהיה רציפה ב $x = -2$ נדרוש כי $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$. נחשב גבולות חד צדדיים.

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{ax^2 + b}{ax + 1} = \frac{4a + 2}{-2a + 1}$$

$$f(-2) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{6 - 5x + x^2}} = \lim_{x \to -2^+} \frac{\sqrt{(2 - x)(2 + x)}}{\sqrt{(2 - x)(3 - x)}} =$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{\sqrt{2 + x)}}{\sqrt{(3 - x)}} = 0$$

נדרוש

$$\frac{4a + 2}{-2a + 1} = 0$$

$$4a + 2 = 0$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

קישור לאתר

נקודות אי רציפות

יש 3 סוגים של אי רציפות

1. סליקה : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ קיים וסופי , אבל $f(x_0)$ לא מוגדר או לא שווה ל - L.

כלומר הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים זה לזה אך לא שווים לערך הפונקציה בנקודה, בעיה זו ניתנת לסילוק / תחיקון).

2. קפיצה (אי רציפות מסוג ראשון) : הגבולות החד צדדיים קיימים וסופיים אך אינם שווים זה לזה

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

3. עיקרית (אי רציפות מסוג שני) : לא סליקה ולא קפיצה. לפחות אחד מהגבולות החד צדדיים לא מוגדר או לא סופי.

קישור לאתר

תרגילים

1. $x_0 \neq \pi K, K \in \mathbb{Z}$, $f(x) = \frac{x}{sin\,(x)}$ בדקו רציפות.

פתרון

נקודות אי הרציפות אלו הנקודות בהן המכנה מתאפס $(x = \pi K)$ בשאר הנקודות הפונקציה רציפה כמנה של פונקציות רציפות בתחום הגדרתן.

עבור $K=0$ אנחנו יודעים $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}=1$ אבל $f(x)$ לא מוגדרת שם

ולכן $x_0=0$ נקודת אי רציפות סליקה.

עבור $K\neq 0$:

$$\lim_{x\to \pi K} f(x)=\lim_{x\to \pi K}\frac{x}{\sin(x)}=\begin{cases}\lim_{x\to \pi K^+}\frac{x}{\sin(x)}= & \begin{cases}\frac{\pi K}{+0}=\infty & K\text{ זוגי}\\ \frac{\pi K}{-0}=-\infty & K\text{ אי זוגי}\end{cases}\\ \lim_{x\to \pi K^-}\frac{x}{\sin(x)}= & \begin{cases}\frac{\pi K}{-0}=-\infty & K\text{ זוגי}\\ \frac{\pi K}{+0}=\infty & K\text{ אי זוגי}\end{cases}\end{cases}$$

הגבול לא קיים ולכן $x_0=\pi K$ נקודת אי רציפות עיקרית.

8. מיינו נקודת אי רציפות של

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\quad,\qquad g(x)=\begin{cases}\frac{\sin(8x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

פתרון

9. מיינו נקודת אי רציפות של $f(x)=[x]$ וקבעו האם $f(x)$ רציפה מימין או משמאל בהן.

פתרון

2. בדקו רציפות של הפונקצייה :

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

תשובה סופית: הפונקציה רציפה בכל מקום.

קישור
לאתר

3. בדקו רציפות של הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases} \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) & |x|\leq 1\\ |x-1| & |x|>1\end{cases}$$

פתרון

נחלק לתחומים

$$f(x)=\begin{cases} \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) & -1\leq x\leq 1\\ x-1 & x>1\\ 1-x & x<-1\end{cases}$$

הפונקציות $x-1,1-x$, $\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)$ רציפות בכל $\mathbb{R}$. נבדוק את נקודות התפר.

$x=1$:

$$\lim_{x\to 1^+} x-1=0,\quad \lim_{x\to 1^-}\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)=0=f(1)$$

כלומר הפונקציה רציפה בנקודה. (הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים ז לזה ושווים לערך הפונקציה בנקודה).

$x=-1$:

$$\lim_{x\to -1^-} 1-x=2,\quad \lim_{x\to -1^+}\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)=0=f(-1)$$

הגבולות החד צדדיים קיימים אך שונים ולכן זאת נקודת אי רציפות מסוג קפיצה.

קישור לאתר

4. בדקו רציפות של הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = 1 \\ \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} & x \neq 1 \end{cases}$$

פתרון

קישור לאתר

5. בדקו רציפות של הפונקציה $f(x) = x[x]$

פתרון

6. בדקו רציפות של הפונקציה$f(x) = cos\ (\pi x)[x]$

פתרון

קישור
לאתר

7. מצאו וסווגו את נקי האי רציפות בקטע $[-4,4]$ של הפונקצייה:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+\pi)|x|}{sin\ (x)} & sin\ (x) \neq 0 \\ 0 & sin(x) = 0 \end{cases}$$

פתרון

המונה רציף ככפל של פונקציות רציפות, המכנה מתאפס בנקודות מסוימות ואילו תהיינה הנקודות החשודות לאי רציפות. בתחום שלנו הנקי הן: $0, \pm\pi$.

$x = -\pi$: אם נציב בפונקציה נקבל ביטוי מהצורה " $\frac{0}{0}$ "

שימוש בזהות

$$\lim_{x\to-\pi} \frac{(x+\pi)|x|}{sin\ (x)} = \lim_{x\to-\pi} \frac{-x(x+\pi)}{sin\ (x)} = \lim_{x\to-\pi} \frac{-x(x+\pi)}{sin\ (x+\pi)} = -1 \cdot \pi = -\pi$$

הגבול המיוחד

השתמשנו בגבול המיוחד, לכן לא היינו צריכים לבדוק את הגבולות החד צדדיים.

מכיוון ש $f(-\pi) = 0$ לכן הנקודה היא מסוג קפיצה. (הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים אך שונים מערך הפונקציה בנקודה).

$x = 0$: אם נציב בפונקציה נקבל ביטוי מהצורה " $\frac{0}{0}$ " אבל פה יש החלפת סימן בין שני הצדדים לכן נבדוק את הגבולות החד צדדיים.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\pi)|x|}{sin(x)}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x+\pi)}{sin(x)}=1\cdot(0+\pi)=\pi\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x(x+\pi)}{sin(x)}=-1\cdot(0+\pi)=-\pi\end{cases}$$

הגבולות החד צדדיים קיימים ושונים לכן זאת נקודה מסוג קפיצה.

$x=\pi$: אם נציב בפונקציה נקבל ביטוי מהצורה " $\frac{2\pi^2}{0}$ " המכנה מחליף סימן ולכן

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{x(x+\pi)}{sin(x)}=\frac{2\pi^2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{x(x+\pi)}{sin(x)}=\frac{2\pi^2}{0^+}=\infty$$

קישור לאתר

שאלות ממבחנים

1. מיינו את נקודות אי-הרציפות של הפונקציה $[sin\,x]$ בקטע $[-2\pi,\pi]$.

תשובה : נקודות חשודות לאי רציפות :

2. אם $f: I_1\to I_2$ הפיכה וההופכית שלה $f^{-1}: I_2\to I_1$ רציפה, אז f רציפה (I_1, I_2 קטעים)

הטענה נכונה.

3.

$$f(x)=\begin{cases}x\left[\frac{1}{x}\right] & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

א- לפונקציה נקודת אי רציפות ב- $x=0$

ב- הפונקציה רציפה בנקודה $x=1$

ג- הפונקציה רציפה בנקודה $x=2$

ד- לפונקציה יש נקודת אי-רציפות עיקרית

ה- $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

תשובה נכונה: ג.

שאלות נוספות

1. הוכיחו כי אם $f(x)$ פונקציה אי-זוגית ורציפה ב-0 אז $f(0)=0$.

2. תהי $\left(f(x)\right)^2$ רציפה בכל $\mathbb{R}$. אזי גם $f(x)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$.

הטענה לא נכונה.

3. נתונה הפונקציה $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$f(x)=\begin{cases}\tan x\cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

האם $f(x)$ רציפה בכל תחום הגדרתה? אם כן, נמקו מדוע. אם לא, מצאו את נקודות האי-רציפות וקבעו את סוגן.

תשובה: הפונקציה רציפה בכל התחום.

קישור לאתר

משפט ערך הביניים (של קושי)

אם $f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ ו $f(a)<\gamma<f(b)$ אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f(c)=\gamma$.

הערה: לפעמים המשפט מאפשר להראות שקיימת נקי' c כך ש $f(c)=0$.

- נמצא a המקיימת $f(a)<0$
- נמצא b המקיימת $f(b)>0$
- ולפי משפט ערך הביניים קיימת $c\in[a,b]$ כך ש $f(c)=0$.

שימוש: כאשר נתבקש להראות שלמשוואה $f(x)=g(x)$ יש פתרון,

נגדיר $h(x)=f(x)-g(x)$ ונשתמש בשלושת השלבים דלעיל.

קישור לאתר

תרגילים

1. הראו שלמשוואה $sin(x) = x + 4$ יש פתרון

פתרון

נגדיר $h(x) = sin(x) - x - 4$. $h(x)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$.

$$h(0) = 0 - 0 - 4 < 0$$

$$h(-2\pi) = 0 + 2\pi - 4 > 0$$

לכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נק׳ $c \in (0,2\pi)$ כך ש $h(c) = 0$.

ז״א $sin(c) - c - 4 = 0$ ולכן $sin(c) = c + 4$ ומצאנו פתרון למשוואה.

קישור לאתר

2. הראו שלמשוואה $e^x + arctan(x) = sin\ (x)$ יש לפחות פתרון אחד.

פתרון

קישור לאתר

3. הראו שלמשוואה $x^4 + x^3 + x = e^{-x^2}$ יש לפחות שני פתרונות.

פתרון

נגדיר $h(x) = x^4 + x^3 + x - e^{-x^2}$. $h(x)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$.

$$h(0) = -e^{-1} < 0$$

$$\lim_{x\to\infty} h(\pi) \to \infty$$

לכן קיים $M > 0$ כך ש $h(M) > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} h(\pi) \to \infty$$

לכן קיים $m < 0$ כך ש $h(m) > 0$

לפי משפט ערך הביניים קיימת נקי $c \in (m, 0)$ כך ש $h(c) = 0$. ולכן c פתרון המשוואה.

לפי משפט ערך הביניים קיימת נקי $b \in (0, M)$ כך ש $h(b) = 0$. ולכן c פתרון המשוואה.

$b \neq c$ כי $b < 0, c > 0$ לכן קיימים לפחות 2 פתרונות למשוואה.

קישור לאתר

4. נתון $f: [0,1] \to [0,1]$ רציפה. הראו שקיים x בקטע $[0,1]$ שעבורו $f(x) = sin\,(2x)$.

פתרון

קישור לאתר

5.

הוכיחו , אם $f(x)$ פונקציה חח״ע ורציפה ב $[a,b]$ ו $f(a) < f(b)$ אז לכל $a < x < b$ מתקיים $f(a) < f(x) < f(b)$.

פתרון

קישור לאתר

6. הוכיחו אם $f(x)$ רציפה ב - $[a,b]$ ו - $x_1 , x_2 , \cdots x_n$ נקודות ב - $[a,b]$ אז קיימת $c \in [a,b]$ כך ש

$$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

פתרון

קישור לאתר

.7

$$f(-1)=-1, f(1)=1, \qquad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-x & x\neq 0, -1\le x\le 1\\ 0 & x=0\end{cases}$$

אבל אין נקודה $c \in [-1,1]$ כך ש - $f(c)=0$ כי הפונקציה לא רציפה ולכן תנאי משפט ערך הביניים לא מתקיימים.

8. נתון $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה בכל תחום הגדרתה. הראו כי למשוואה $e^{f(x)}=2x+1$ יש פתרון ממשי.

פתרון

נחפש x כל ש- $e^{f(x)}-2x-1=0$ נגדיר $g(x)=e^{f(x)}-2x-1$. $g(x)$ רציפה כהרכבה ופעילות אריתמטיות על פונקציות רציפות ב - $[0,1]$.

$$g(1)=e^{f(1)}-2-1\le e^{1}-3<0$$

$$g(0)=e^{f(0)}-2\cdot 0-1>e^{0}-1\ge 0$$

קבלנו $g(0)\ge 0$, $g(1)<0$ לכן לפי משפט ערך הביניים קיימת $c\in[0,1]$ כך ש $g(c)=0$ כנדרש.

קישור לאתר

שאלות ממבחנים

1. הוכיחו כי למשוואה $sin\,(x) = x^2 - 1$ יש לפחות שני פתרונות בקטע $(-1,2)$.

2. נתון כי $f: [0,1] \to [0,1]$ רציפה. הראו שקיים $x \in [0,1]$ עבורו $f(x) = sin\,(2x)$.

3. למשוואה $5^x = 4^x + 3^x$ יש לפחות שורש ממשי אחד

הטענה נכונה.

4. תהא $f: [0,1] \to [0,1]$ רציפה. הראו כי קיימת נקודה $0 \le c \le 1$ עבורה $f(c) = c$.

שאלה נוספת

הראו כי למשוואה $9 = 1 + tan^2\,x + x^4$ קיים שורש ממשי יחיד בקטע $\left(\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$

קישור לאתר

משפטי ויירשטראס

תהי $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ אזי $f(x)$ חסומה בקטע זה.

תהי $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ אזי $f(x)$ מקבלת מקסימום ומינימום גלובליים בקטע זה.

קישור לאתר

תרגילים

1. הוכח / הפרך

א. כל פונקציה רציפה ב - $\mathbb{R}$ חסומה.

לא נכון, דוגמה נגדית: $f(x) = x$.

א* . פונקציה רציפה ב $(0,1]$ האם חסומה שם האם מקבלת מקסימום?

לא נכון, תנאי משפט ויירשטראס לא מתקיימים , דוג': $f(x) = \frac{1}{x}$.

ג. f רציפה בכל $\mathbb{R}$ ו - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L_1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L_2$ נתון L_1, L_2 סופיים. האם f מקבלת מקסימום ומינימום ב- $\mathbb{R}$?

לא נכון, דוגמה נגדית: $f(x) = arctan\,(x)$.

קישור לאתר

3. נתון $f(x)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$ ומקיימת $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. הראו כי $f(x)$ מקבלת מינימום גלובלי ב $(-\infty,\infty)$.

פתרון

לא נוכל להשתמש במשפט ויירשטראס כי התחום לא סגור. נסמן $f(0) = M$ ונחלק את $\mathbb{R}$ לשלושה תחומים.

- קיים x_1 כך שלכל $x > x_1$ מתקיים $f(x) > M$ [כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$].
- קיים x_2 כך שלכל $x < x_2$ מתקיים $f(x) > M$ [כי $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$].
- בקטע הסגור $[x_1, x_2]$ $f(x)$ רציפה ולכן ע״פ משפט ויירשטראס מקבלת מינימום גלובלי, נסמנו ב $-m$.

לסיכום : בקטעים 1,2 לא יתקבל המינימום הגלובלי כי $f(x) > f(0) = M$ כלומר המינימום הגלובלי יתקבל בקטע הסגור והוא : $min\,\{f(0) = M.m\}$.

קישור לאתר

4. נתון $f(x)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$ ומקיימת $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 11, f(0) = 20$.

הוכיחו א) $f(x)$ חסומה. ב) $f(x)$ מקבלת מקסימום גלובלי ב $(-\infty, \infty)$. ג) תנו דוגמה לפונקציה המקיימת את התנאים הללו ואין לה מינימום ב - $\mathbb{R}$.

פתרון

קישור לאתר

.5

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-cos(x)+sin^2(\pi x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

א) בדקו רציפות ב) חשבו גבולות ב $\pm\infty$ ג) הוכיחו f חסומה.

ד) הוכיחו f מקבלת מקסימום ומינימום ב $[0,\infty)$.

ה) הוכיחו f מקבלת מקסימום ומינימום ב $(-\infty,\infty)$.

פתרון

א) בכל $x\neq 0$, $f(x)$ רציפה כמנה של פונקציות רציפות עם מכנה שאינו מתאפס, נשאר לבדוק בנקודה $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)+sin^2(\pi x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+sin^2(\pi x)}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{sin^2(\pi x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\cdot sin\left(\frac{x}{2}\right)+\lim_{x\to 0}\pi\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\cdot sin(\pi x)$$

$$=1\cdot 0+\pi\cdot 1\cdot 0=0$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$$

ולכן $f(x)$ רציפה גם ב - $x=0$.

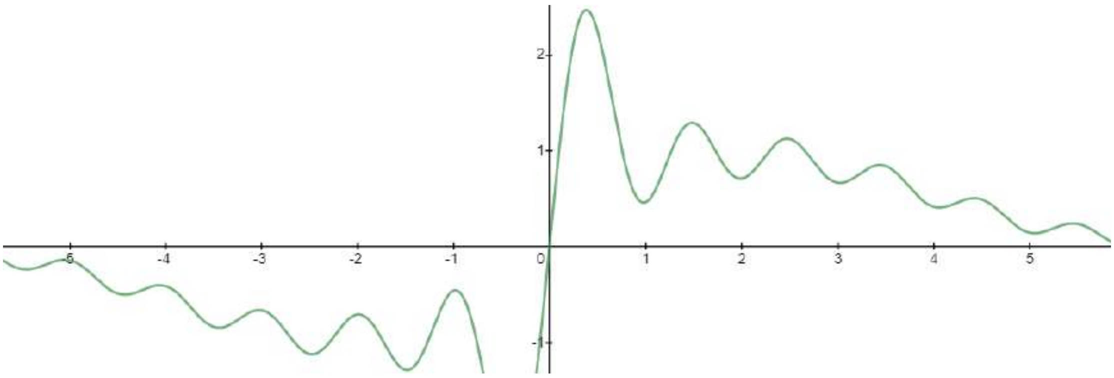
ב)

$$0\leq\left|\frac{1-cos(x)+sin^2(\pi x)}{x}\right|\leq\frac{1+|cos(x)|+sin^2(\pi x)}{|x|}\leq\frac{3}{|x|}\underset{x\to\pm\infty}{\rightarrow}0$$

ג) היות ו - $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ נוכל למצוא $a > 0$ כך ש $|f(x)| < 1$ כאשר $|x| > a$.

$f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[-a,a]$ ולכן לפי ויישטראס חסומה בו, נקבע K כך ש $|f(x)| < K$ כאשר $x \in [-a,a]$.

נסמן $M = max\,\{1,K\}$ ונקבל $|f(x)| < M$ לכל x.



ד) המונה של $f(x)$ אי שלילי ולכן $f(0) = 0 \le f(x)$ לכל $0 \le x < \infty$. ובנקודה $x = 0$ מתקבל מינימום של $f(x)$ בקרן $[0,\infty)$. נראה ש - $f(x)$ מקבלת מקסימום בקרן.

נקבע נקודה $0 < b < \infty$: מצד אחד $f(b) \ge 0$ מצד שני היות ו - $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

נוכל למצוא $b < a$ כך ש $f(x) \ge f(b)$ לכל $a \le x$.

ע"פ ויירשטראס $f(x)$ מקבלת בקטע הסגור $[0,a]$ מקסימום, נניח כי הוא מתקבל ב - c. היות ו $b \in [0,a]$ – מתקיים $f(b) \le f(c)$ לכן גם לכל $a \le x$ מתקיים $f(x) \le f(b) \le f(c)$ לכן $f(c)$ היא המקסימום של f בקרן $[0,\infty)$.

ה) היות ו - $f(0) = 0 \ge f(x)$ בקרן $(-\infty,0]$ ו - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ לכן שיקול דומה לסעיף הקודם מבטיח כי קיימת נקודה c' שבה $f(x)$ מקבלת מינימום בקרן $(-\infty,0]$ וכי המקסימום שלה מתקבל ב $x = 0$.

לסיכום על כל הישר מתקיים $f(c') \le f(x) \le f(c)$.

דרך נוספת : להשתמש בכך ש - $f(x)$ פונקציה אי זוגית.

קישור לאתר

שאלות ממבחנים

1. הוכיחו כי לפונקציה המחזורית $f(x)=\frac{sin(x)}{2+cos\,(11x)}$ יש מקסימום על הישר הממשי.

שאלות נוספות

עוד שאלות ממבחנים

1. מצאו נקי מינימום ומקסימום מוחלטים של הפונקציה $f(x)=|sin\,x|(x+2)$ בקטע $[-\pi/4,\pi/4]$

2. מצאו בקטע $[-\pi,\pi]$ נקודות מינימום ומקסימום גלובליים לפונקציה

$$f(x)=x-1-|cos\,(x)|$$

.3

$$f(x) = |sin\,x| + x$$

האם יש לפונקציה מינימום ומקסימום מוחלטים בקטע $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$? א״כ מצאו אותן, אם לא הסבירו מדוע אין.