חשבוניה

פתרונות וידאו מלאים

שיעור 6

נושאי השיעור

- אריתמטיקה של נגזרות
- כלל השרשרת
- נגזרות מסדר גבוה – כלל לייבניץ
- נגזרת של פונקציה הפוכה
- משפט פרמה
- נגזרות חד צדדיות

קישור לאתר

נגזרת

נאמר כי $f(x)$ גזירה ב - x_0 אם הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ קיים וסופי, במקרה זה נאמר כי $f(x)$ גזירה ב - x_0 ונסמן את הגבול הנ"ל ב $f'(x_0)$.

הגדרה שקולה : $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

משמעות גאומטרית של הנגזרת : $f'(x_0)$ הו מספר השווה לשיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה ב- x_0 .

קישור לאתר

תרגילים

1. מצאו את $f'(1)$ כאשר $f(x)=x+(x-1)arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h+(1+h-1)arcsin\sqrt{\frac{1+h}{1+h+1}}-1}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h+h\cdot arcsin\sqrt{\frac{1+h}{1+h+1}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left[1+arcsin\sqrt{\frac{1+h}{1+h+1}}\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[1+arcsin\sqrt{\frac{1+h}{1+h+1}}\right]=1+arcsin\sqrt{\frac{1}{2}}=1+\frac{\pi}{4}$$

קישור לאתר

2. חשבו את הנגזרת של $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ עבור $x\neq 1$ (לפי הגדרה).

תשובה סופית:

$$\frac{-2}{(x_0-1)^2}$$

קישור לאתר

כללי אריתמטיקה של נגזרות

יהיו $f(x),g(x)$ גזירות ב - x_0 אזי:

$$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2},\quad g(x_0)\neq 0$$

$$[\alpha\cdot f(x)]'=\alpha\cdot f'(x)$$

קישור לאתר

נגזרות של פונקציות ידועות

$$[x^{\alpha}]' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$[sin(x)]' = cos(x)$$

$$[cos(x)]' = -sin(x)$$

$$[tan(x)]' = \frac{1}{cos^2(x)}$$

$$[cot(x)]' = -\frac{1}{sin^2(x)}$$

$$[e^x]' = e^x, \qquad [a^x]' = a^x \cdot \ln(a)$$

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}, \qquad [log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

$$[arcsin(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[arccos(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[arctan(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$[arccot(x)]' = -\frac{1}{1+x^2}$$

קישור לאתר

כלל השרשרת

תהי יהיו $f(x)$ גזירה ב - x_0 ו - $g(x)$ גזירה ב- $f(x_0)$ אז $g \circ f$ גזירה ב - x_0 ומתקיים:

$$[g \circ f]'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

תרגילים

1.

קישור לאתר

$$\left[\frac{e^{sinx}}{\sqrt{x}}\right]' = \frac{\left(e^{sinx}\right)' \cdot \sqrt{x} - e^{sinx} \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{e^{sinx} \cdot cosx \cdot \sqrt{x} - e^{sinx} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'}{x} =$$

$$\frac{2x \cdot e^{sinx} \cdot cosx - e^{sinx}}{2\sqrt{x} \cdot x} = \frac{e^{sinx}(2x \cdot cosx - 1)}{2x^{1.5}}$$

5.

נתונה $F(x)$ גזירה פעמיים, ופונקציה $G(x)$ מקיימת את השוויון

$$G'(x) = F(G(x))$$

בנוסף, ידוע:

$$F'(1) = \frac{1}{2}, G(0) = 1, F''(1) = 3, G'(0) = 2$$

חשבו את $G'''(0)$

פתרון

נשתמש בכלל השרשת ונתחיל מהנתון המקשר את שתי הפונקציות.

$$G'(x) = F(G(x))$$

נגזור

$$G''(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x)$$

נציב $x = 0$

$$G''(0) = F'\big(G(0)\big) \cdot G'(0) = F'(1) \cdot G'(0) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

נגזור פעם נוספת (נגזרת של מכפלה):

$$G''(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x)$$

$$G'''(x) = F''\big(G(x)\big) \cdot G'(x) \cdot G'(x) + F'(G(x)) \cdot G''(x)$$

נציב $x = 0$

$$G'''(0) = F''\big(G(0)\big) \cdot G'(0) \cdot G'(0) + F'(G(0)) \cdot G''(0)$$

$$G'''(0) = F''(1) \cdot G'(0) \cdot G'(0) + F'(1) \cdot G''(0)$$

$$G'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 12\frac{1}{2}$$

קישור לאתר

מה נעשה כאשר הנעלם מופיע בבסיס ובמעריך?

.2

גזרו את x^{x^x}.

פתרון: נשתמש בכך שהפונקציה המעריכית והפונקציה הלוגריתמית הפוכות זו לזו.

$$x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)}$$

$$x^{x^x} = e^{\ln(x^{x^x})} = e^{x^x \ln(x)}$$

$$\left(x^{x^x}\right)' = \left(e^{x^x ln(x)}\right)' = e^{x^x ln(x)} \cdot (x^x \ln(x))' = x^{x^x} \cdot \left(e^{xln(x)} \cdot lnx\right)' =$$

$$x^{x^x}\left(e^{xln(x)} \cdot \left(xln(x)\right)' \cdot lnx + e^{xln(x)} \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$x^{x^x}\left(x^x \cdot \left(1 \cdot ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot lnx + x^x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$x^{x^x}\left(x^x \cdot (ln(x)+1) \cdot lnx + x^x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{x^x} \cdot x^x\left(ln^2(x) + ln\,(x) + \frac{1}{x}\right)$$

קישור לאתר

.3

גזרו את $(5x^2)^{sinx}$.

תשובה סופית:

$$(5x^2)^{sinx}\left[cosx \cdot ln(5x^2) + \frac{2sinx}{x}\right]$$

קישור לאתר

.4

גזרו את $h(x) = (arctanx)^x$.

פתרון

דרך נוספת "לטפל" בביטויים שהנעלם מופיע בבסיס ובמעריך היא הוצאת ln לשני האגפים:

$$ln[h(x)] = ln[(arctanx)^x] = x \cdot ln[(arctanx)]$$

ועכשיו נגזור את שני הצדדים:

$$\frac{h'}{h} = ln(arctanx) + x \cdot \frac{1}{(arctanx)} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$h' = h \cdot \left[ln(arctanx) + x \cdot \frac{1}{(arctanx)} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right]$$

$$h' = (arctanx)^x \cdot \left[ln(arctanx) + \frac{1}{(arctanx)} \cdot \frac{x}{1+x^2}\right]$$

קישור לאתר

.6

באילו נקודות הפונקציה הבאה גזירה $f(x) = \begin{cases} x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ מהי הנגזרת?

פתרון

עבור כל נקודה השונה מ – 0 זוהי הרכבה ומכפלה של פונקציות גזירות בתחום הגדרתן ולכן ניתן להשתמש בכללי הגזירה (ולא לפי הגדרה), בנקודה $x = 0$ נגזור לפי הגדרה.

$$x \neq 0 \quad f'(x) = 2x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

נשים לב שאם נשאיף את x ל – 0 נקבל שהגבול לא קיים (כי ל - $cos\left(\frac{1}{x}\right)$ אין גבול שם).

$$x=0\ \ f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2 sin\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0}hsin\left(\frac{1}{h}\right)=0$$

לסיכום:

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)-cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

הערה: הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$ כי היא גזירה שם, אבל $f'(x)$ לא רציפה ב $x=0$.

קישור
לאתר

.7

באילו נקודות הפונקציה הבאה גזירה $f(x)=\begin{cases}xsin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ מהי הנגזרת?

תשובה: הפונקציה לא גזירה ב – 0.

קישור
לאתר

.8

באילו נקודות הפונקציה הבאה גזירה $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ מהי הנגזרת?

תשובה: הפונקציה לא גזירה ב – 0.

קישור לאתר

נגזרת של פונקציה הפוכה

תהי $f: x \to y$ הפיכה (חח"ע ועל) ב - $x_0 = f^{-1}(y_0)$ כך ש - $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$

אזי $f^{-1}: y \to x$ גזירה ב - y_0 ומתקיים

$$[f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

קישור לאתר

תרגילים

1. גזרו את $arcsin(x)$ עבור y_0 כללי בתחום הגדרתה.

פתרון

נסמן $f: x \to y$ כשר $f(x) = sin(x)$

$f^{-1}: y \to x$ $f^{-1}(y) = arcsin(x)$

$$[arcsin(y_0)]' = [f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{cos\ (arcsin(y_0))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(arcsin(y_0))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - {y_0}^2}}$$

תחום ההגדרה של $arcsin\ (x)$ הוא $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ושם $f'(x) = cos(x) > 0$

קישור לאתר

2. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הנתונה ע"י $f(x) = e^x - 2e^{-x}$ הראו ש $- f$ הפיכה (חח"ע ועל) וחשבו את $(f^{-1})'(1)$.

תשובה סופית: $\frac{1}{3}$.

קישור לאתר

נגזרות מסדר גבוה – כלל לייבניץ

תהיינה f,g גזירות n פעמים אזי:

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}$$

כאשר $g^{(k)}$ היא הנגזרת ה – k-ית של g ו - $g=g^{(0)}$.

קישור לאתר

תרגילים

1. חשבו $(x^3sinx)^{(100)}$

פתרון

נסדר את הנגזרות של שתי הפונקציות:

$$(x^3)^{(0)}=x^3,\qquad (x^3)^{(1)}=3x^2,\ \ (x^3)^{(2)}=6x,\ \ (x^3)^{(3)}=6,\ \ (x^3)^{(n)}=0\ \ n\geq 4$$

$$(sinx)^{(k)}=\begin{cases} cosx & k=4m+1\\ -sinx & k=4m+2\\ -cosx & k=4m+3\\ sinx & k=4m+4\end{cases}$$

$$(x^3sinx)^{(100)}=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}(sinx)^{(100-k)}(x^3)^{(k)}=$$

$$=\binom{100}{0}(sinx)^{(100)}(x^3)^{(0)}+\binom{100}{1}(sinx)^{(99)}(x^3)^{(1)}+\binom{100}{2}(sinx)^{(98)}(x^3)^{(2)}$$

$$+\binom{100}{3}(sinx)^{(97)}(x^3)^{(3)}=$$

$$1\cdot sinx\cdot x^3+100\cdot(-cosx)\cdot 3x^2+\frac{100\cdot 99}{2}(-sinx)\cdot 6x+\frac{100\cdot 99\cdot 98}{6}cosx\cdot 6=$$

$$x^3 sinx - 300x^2 cosx - 3 \cdot 100 \cdot 99 sinx + 99 \cdot 98 cosx$$

קישור לאתר

2. $f(x) = x^2 cosx$ חשבו $f^{(17)}(x)$

תשובה סופית :

$$-x^2 sinx + 34x cosx + 17 \cdot 16 sinx$$

קישור לאתר

משפט פרמה

תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I ותהי $x_0 \in I$ נקודה פנימית. אם ל - f יש ערך מינימלי / מקסימלי בנקודה x_0 ו $- f$ גזירה בנקודה x_0 אזי $f(x_0) = 0$.

הערה

כשנחפש מקסימום או מינימום מקומיים ל - f גזירה, נחפש פתרונות ל - $f'(x) = 0$.

קישור לאתר

תרגיל

יהיו $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ ויהי $m > 0$ כך שלכל $x \in [-m, m]$

$$f(x) = {a_1}^x + {a_2}^x + \cdots {a_n}^x \geq n$$

הוכיחו כי $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = 1$

פתרון

קישור לאתר

נגזרות חד צדדיות

תהי f מוגדרת בסביבה ימנית של x_0 , אם הגבול

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

קיים וסופי , נאמר כי f גזירה מימין ב - x_0 ונסמן : $f_+{}'(x_0)$.

בצורה דומה נגדיר את הנגזרת משמאל ונסמנה ב- $f_-{}'(x_0)$.

משפט

תהי x_0 f מוגדרת ב - x_0 אזי

f גזירה ב - x_0 $\leftrightarrow$ הנגזרות החד צדדיות קיימות ושוות

קישור לאתר

תרגיל

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & -1\le x\le 2\\ (x-4)^2+1 & 2<x\le 3\end{cases}$$

א. האם $f(x)$ גזירה ב - $x=2$?

ב. מצאו מקסימום ומינימום גלובליים ל - $f(x)$.

פתרון

א.

$$f_-(2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(2+h)^2+1-5}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{4+4h+h^2+1-5}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} (4+h) = 4$$

$$f_+(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h-4)^2+1-5}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{4-4h+h^2+1-5}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h(-4+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} (-4+h)$$

$$= -4$$

קבלנו $f_+(2) \neq f_-(2)$ ולכן אין נגזרת ב- 2.

ב.

היות ומדובר על פונקציה רציפה בקטע סגור לכן לפיויישטראס קיימים לה מקסימום ומינימום.

הם יכולים להימצא בנקודות הבאות: נקודות הקצה או ההדבקה, נקודת בהן הגזרת לא מוגדרת ובנקודות פנימיות בהן הנגזרת מתאפסת (לפי פרמה).

נקודות הקצה / הדבקה:

$$f(-1) = 2, \qquad f(2) = 5, \qquad f(3) = 2$$

נקודות פנימיות בהן הנגזרת מתאפסת:

$$f' = \begin{cases} 2x & -1 \le x \le 2 \\ 2(x-4) & 2 < x \le 3 \end{cases} = \begin{cases} x = 0 & -1 \le x \le 2 \\ x = 4 & 2 < x \le 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 & -1 \le x \le 2 \\ \text{לא בתחום} & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

לכן נוסיף לנקודות ה"חשודות" את $f(0) = 1$

לסיכום:

המינימום מתקבל ב $x = 0$ והוא $f(0) = 1$

המקסימום מתקבל ב $x = 2$ והוא $5f(2) =$

קישור לאתר

הערות

- אם הפונקציה גזירה ב - x_0 אז היא גם רציפה שם, ההפך לא בהכרח נכון, למשל:

$f(x) = |x|$

קישור לאתר

שאלות ממבחנים

1. חשבו $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{sin\,(x)}$ (רמז: הגדרת הנגזרת).

תשובה: 1

2.

f ו-g מוגדרות ב-$[-1,1]$. נתון ש- : $|g(x)| \le |f(x)|$ לכל $x \in [-1,1]$ ו-1 $= \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{\sin x}$.

אזי

- בהכרח $g(0) = 0$
- אם f ו-g רציפות אזי קיימת סביבה של 0 עבורה $|f(x)| \le |\sin x|$
- אם f ו-g גזירות ב-0 אז $f'(0) < 1$
- אם g רציפה ב- 0.5 אזי f רציפה ב $0.5-$

קיים הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$

תשובה נכונה : ג

3. נתונה פונקציה $f: R \to R$

א- אם f רציפה אז קיימים הגבולות $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim_{x\to \infty} f(x)$

ב- אם f חסומה אז קיימים הגבולות $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim_{x\to \infty} f(x)$

ג- אם הגבולות $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim_{x\to \infty} f(x)$ קיימים ו- f רציפה, אז f חסומה.

ד- אם f חסומה וגזירה אז קיימים הגבולות $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim_{x\to \infty} f(x)$

ה- אם f גזירה והנגזרת f' חסומה אז קיימים הגבולות $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim_{x\to \infty} f(x)$

תשובה נכונה : ג.

4. תהא $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה.

א. הראו כי קיימת נקודה $0\le c\le 1$ עבורה $f(c)=c$.

ב. נניח שבנוסף להנחות סעיף א׳ כי f גזירה בקטע $[0,1]$ וכי $|f'(x)|<1$ לכל $0\le x\le 1$.

הראו כי קיימת נקודה **יחידה** $0\le c\le 1$ עבורה $f(c)=c$.

5. אם הנגזרות החד-צדדיות של $f(x)$ קיימות ב-0 אז $f(x)$ רציפה ב-0

הטענה נכונה

6. אם $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 1$ אז $f'(0)$ קיים ושווה ל-1

הטענה לא נכונה

7. $f(x)$ מוגדרת לכל x וגזירה רק בנקודה $x=-1$

מתקיים

$$f'(-1) = -2$$

חשבו

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(-1+2x)-f(-1-3x)}{4x}$$

תשובה : 2.5-

8. אם $f: I_1 \to I_2$ הפיכה וגזירה בקטע I_1 אז הפונקציה ההופכית $f^{-1}: I_2 \to I_1$ גזירה בקטע I_2

הטענה לא נכונה

9. אם הגבול $\lim_{x \to 0} \frac{f(5+6x)-f(5)}{3x}$ קיים (וסופי) אז הפונקציה גזירה ב-5

הטענה נכונה

10. אם $f(x)$ גזירה לכל x, אז בהכרח $f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x)$

הטענה לא נכונה

11. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f(x)$ גזירה לכל x ו- $f'(x)$ אי זוגית, אזי $f(x)$ זוגית.

ב. אם $f(x)$ גזירה לכל x ו- $f'(x)$ זוגית, אזי $f(x)$ אי זוגית.

טענה אחת נכונה ואחת לא נכונה.

שאלה נוספת

נתונה הפונקציה $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$f(x)=\begin{cases} \tan x\cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

א. חשבו את $f'(x)$ בנקודות בהן היא קיימת.

ב. האם $f'(x)$ רציפה בכל תחום הגדרתה? אם כן, נמקו מדוע. אם לא, מצאו את נקודות האי-רציפות וקבעו את סוגן.