משוואת הגלים הלא הומוגנית במיתר אינסופי (בעיית קושי)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad 0 < t$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x)\ \ , -\infty < x < \infty$$

דרכים לפתרון

דרך א – ניחוש פתרון למד"ח (ללא קשר לת"ה)

אם F תלויה במשתנה אחד בלבד (x או t) ננחש פתרון התלוי רק באותו משתנה. הצבה המשתנה תיתן מד"ר (במקום מד"ח). לאחר מציאת הפתרון הפרטי $v(x,t)$ נגדיר פונקציה

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$$

ונקבל מד"ח הומוגנית (שאותה אנו יודעים לפתור).

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = (u_{tt} - c^2 u_{xx}) - (v_{tt} - c^2 v_{xx}) = F(x,t) - F(x,t) = 0$$

עם ת"ה:

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = f(x) - v(x,0)$$

$$w_t(x,0) = u_t(x,0) - v_t(x,0) = g(x) - v_t(x,0)$$

פתרון הבעיה ההומגנית היא הפונקציה $w(x,t)$.

ומכאן פתרון הבעיה המקורית:

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$$

דרך ב – נוסחת דלמבר (למשוואה אי הומוגנית)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int_{\tau=0}^{t}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\varepsilon,\tau)d\varepsilon d\tau$$

דרך ג – מעבר לצורה קנונית

תרגילים

.1

$$u_{tt}-4u_{xx}=e^{x}+sin\,(t)\,,\qquad -\infty<x<\infty,\qquad 0<t$$

$$u(x,0)=0,\qquad u_t(x,0)=\frac{1}{1+x^2}\ \ ,-\infty<x<\infty$$

א. פתרו ע״י ניחוש פתרון פרטי. ב. פתרו ע״י נוסחת דלמבר (המורחבת).

פתרון

א.

ננחש פתרון פרטי $v(x,t)$ המקיים : $v(x,t)=A(x)+B(t)$

נציב במשוואה :

$$v_{tt}-4v_{xx}=e^{x}+sin\,(t)$$

$$-4A''(x)+B''(t)=e^{x}+sin\,(t)$$

השוואת מקדמים :

$$A''(x)=-\frac{1}{4}e^{x},\qquad B''(t)=sin\,(t)$$

$$A(x)=-\frac{1}{4}e^{x},\qquad B(t)=-sin\,(t)$$

$$v(x,t)=-\frac{1}{4}e^{x}-sin(t)$$

ת״ה יהיו :

$$v(x,0)=-\frac{1}{4}e^{x},\qquad v_t(x,0)=-1$$

נגדיר פונקציה

$$w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$$

ונקבל מד"ח הומוגנית

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$$

עם ת"ה :

$$w(x,0) - u(x,0) - v(x,0) = 0 - \left(-\frac{1}{4}e^x\right) = \frac{1}{4}e^x$$

$$w_t(x,0) = u_t(x,0) - v_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2} - (-1) = \frac{1}{1+x^2} + 1$$

נפתור אותה בעזרת נוסחת דלמבר למשוואה הומוגנית :

$$w(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}e^{x+2t} + \frac{1}{4}e^{x-2t}\right] + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\left(\frac{1}{1+s^2} + 1\right)ds =$$

$$\frac{e^x}{4}\left[\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\right] + \frac{1}{4}[arctan(s) + s]_{x-2t}^{x+2t} =$$

$$\frac{e^x}{4}\left[\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\right] + \frac{1}{4}[arctan(x+2t) + x + 2t - arctan(x-2t) - x + 2t] =$$

$$\frac{e^x}{4}cosh\,(2t) + \frac{1}{4}[arctan(x+2t) - arctan(x-2t)] + t$$

ולסיכום פתרון הבעיה המקורית :

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$$

$$\boldsymbol{u(x,t) = \frac{e^x}{4}cosh\,(2t) + \frac{1}{4}[arctann(x+2t) - arctan(x-2t)] + t - \frac{1}{4}e^x - sin(t)}$$

ב.

פתרון בעזרת נוסחת דלמבר למשוואה לא הומוגנית :

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds+\frac{1}{2c}\int_{\tau=0}^{t}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}F(\varepsilon,\tau)d\varepsilon d\tau$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\left[\frac{1}{1+s^2}\right]ds+\frac{1}{4}\int_{\tau=0}^{t}\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}[e^{\varepsilon}+sin(\tau)]d\varepsilon d\tau=$$

$$\frac{1}{4}arctan(s)|_{x-2t}^{x+2t}+\frac{1}{4}\int_{\tau=0}^{t}\left(e^{\varepsilon}+\varepsilon sin\,(\tau)|_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}\right)d\tau=\frac{1}{4}arctan(s)|_{x-2t}^{x+2t}$$

$$+\frac{1}{4}\int_{\tau=0}^{t}\left[e^{x+2(t-\tau)}+\left(x+2(t-\tau)\right)sin(\tau)-\left(e^{x-2(t-\tau)}+\left(x-2(t-\tau)\right)sin(\tau)\right)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{4}arctan(s)|_{x-2t}^{x+2t}+\frac{1}{4}\int_{\tau=0}^{t}\left[e^{x+2(t-\tau)}-e^{x-2(t-\tau)}+(4t-4\tau)sin\,(\tau)\right]d\tau=$$

$$\frac{1}{4}arctan(s)|_{x-2t}^{x+2t}+\frac{1}{4}e^{x}\int_{\tau=0}^{t}\left\{e^{x}\left[e^{2(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\right]+4(t-\tau)sin\,(\tau\right\}d\tau=$$

$$\frac{1}{4}arctan(s)|_{x-2t}^{x+2t}+\frac{1}{2}e^{x}\int_{\tau=0}^{t}sinh(2t-2\tau)d\tau+\int_{\tau=0}^{t}(t-\tau)sin\,(\tau)\,d\tau=$$

$u=t-\tau,\quad dv=sin\tau$

$du=-1.\quad v=-cos\tau$

נזכר ש $\int sinh(t)=\cosh\,(t)$

ואת $\int_{\tau=0}^{t}(t-\tau)\sin\,(\tau)\,d\tau$ נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים :

$$\int(t-\tau)sin\,(\tau)\,d\tau=(\tau-t)\,cos(\tau)-\int cos(\tau)\,d\tau=(\tau-t)\,cos(\tau)-sin\tau$$

ולכן :

$$u(x,t)=\frac{1}{4}arctan(s)|_{x-2t}^{x+2t}-\frac{1}{4}e^{x}cosh\,(2t-2\tau)_{\tau=0}^{t}+[(\tau-t)\,cos(\tau)-sin\tau]_{\tau=0}^{t}=$$

$$\frac{1}{4}[arctann(x+2t)-arctan(x-2t)]-\frac{1}{4}e^x\cosh(0)+\frac{1}{4}e^x\cosh(2t)-sint+t$$

.2

$$u_{tt}-4u_{xx}=t^2+x\,,\qquad -\infty<x<\infty,\qquad 0<t$$

$$u(x,0)=x,\qquad u_t(x,0)=\frac{x^2}{4}\ ,-\infty<x<\infty$$

תשובה סופית :

$$u(x,t)=x+\frac{(x+2t)^3}{24}+\frac{1}{12}t^4-\frac{1}{24}x^3$$

.3

$$u_{tt}-4u_{xx}=t+x\,,\qquad -\infty<x<\infty,\qquad 0<t$$

$$u(x,0)=x,\qquad u_t(x,0)=0\ ,-\infty<x<\infty$$

פתרון ע"י ניחוש פתרון פרטי למד"ח הלא הומוגנית

שלב ראשון – ניחוש פתרון למד"ח (בלי התייחסות לת"ה)

ננחש פתרון פרטי $v(x,t)$ באופן כללי לאחר 2 אינטגרציות נקבל פולינום ממעלה שלישית ולכן נוכל להציע פולינום כללי ממעלה שלישית בשני נעלמים ולקבל הרבה דרגות חופש :

$$v(x,t)=a_1x^3+a_2x^2t+a_3xt^2+a_4t^3+b_1x^2+b_2xt+b_3t^2+c_1x+c_2t+d$$

$$v_{tt}=2a_3x+6ta_4+2b_3$$

$$v_{xx}=6a_1x+2a_2t+2b_1$$

נציב במד"ח:

$$v_{tt} - 4v_{xx} = t + x$$

$$2a_3x + 6ta_4 + 2b_3 - 4(6a_1x + 2a_2t + 2b_1) = t + x$$

השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} x: & 2a_3 - 24a_1 = 1 \\ t: & 6a_4 - 12a_2 = 1 \\ 1: & 2b_3 - 8b_1 = 0 \end{cases}$$

d, b_2, c_1, c_2 קבועים אקראיים (לא קשורים למשוואה). בנוסף יש עוד 3 דרגות חופש ולכן נבחר:

$$a_3 = a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = d = 0$$

ונקבל $a_4 = \frac{1}{6}, a_1 = -\frac{1}{24}$ והפתרון הפרטי הוא:

$$\boldsymbol{v(x,t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{24}x^3}$$

שלב שני – נבנה את הבעיה ההומוגנית עם ת"ה מתאימים

נגדיר פונקציה

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$$

ונקבל מד"ח הומוגנית

$$w_{tt} - 4w_{xx} = 0$$

עם ת"ה:

$$w(x,0) - u(x,0) - v(x,0) = x - \left(-\frac{1}{24}x^3\right) = x + \frac{1}{24}x^3$$

$$w_t(x,0) = u_t(x,0) - v_t(x,0) = 0$$

שלב שלישי – פתירת הבעיה ההומוגנית בעזרת נוסחת דלמבר למשוואה הומוגנית

$$w(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x+2t)+\frac{1}{24}(x+2t)^3+(x-2t)+\frac{1}{24}(x-2t)^3\right]+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}(0)ds=$$

$$=x+\frac{(x+2t)^3+(x-2t)^3}{48}$$

ולסיכום פתרון הבעיה המקורית:

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$$

$$u(x,t)=x+\frac{(x+2t)^3+(x-2t)^3}{48}+\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{24}x^3$$

הערה:

נשים לב שיכלנו לבחור קבועים אחרים עבור הפתרון הפרטי $v(x,t)$ למשל:

$a_1=a_2=b_1=b_2=b_3=c_2=d=0$ ולקבל מהשוואת מקדמים $a_3=\frac{1}{2},a_4=\frac{1}{6},c_1=1$ ואז

הפתרון הפרטי המתאים היה: $v(x,t)=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}xt^2+x$

פתרון זה מקיים את המשוואה ואת ת"ה ולכן $u(x,t)=v(x,t)=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}xt^2+x$

פתרון בעזרת נוסחת דלמבר למשוואה לא הומוגנית

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds+\frac{1}{2c}\int_{\tau=0}^{t}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}F(\varepsilon,\tau)d\varepsilon d\tau$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[(x+2t)+(x-2t)]+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}(0)ds+\frac{1}{4}\int_{\tau=0}^{t}\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}(\tau+\varepsilon)d\varepsilon d\tau=$$

$$= x + \frac{1}{4}\int_{\tau=0}^{t}\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}\left[\tau\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\right]_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} d\varepsilon d\tau =$$

$$x + \frac{1}{4}\int_{\tau=0}^{t}\left\{\tau[(x+2(t-\tau)) - (x-2(t-\tau))] + \frac{[x+2(t-\tau)]^2 - [x-2(t-\tau)]^2}{2}\right\} d\tau =$$

$$= x + \frac{1}{4}\int_{\tau=0}^{t}\left\{4(t-\tau)\tau + \frac{8x(t-\tau)}{2}\right\} d\tau = x + \int_{\tau=0}^{t}[(t-\tau)\tau + x(t-\tau)]d\tau =$$

$$= x + \left[\frac{1}{2}\tau^2 t - \frac{1}{3}\tau^3 + xt\tau - \frac{1}{2}\tau^2 x\right]_{\tau=0}^{t} = x + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{3}t^3 + xt^2 - \frac{1}{2}t^2 x =$$

$$= \boldsymbol{x + \frac{1}{6}t^3 + \frac{xt^2}{2}}$$

פתרון הבעיה באמצעות מעבר לצורה קנונית

פונקציה של q ו s

החלפת משתנים: $q = x - 2t, s = x + 2t$

תעביר את המשוואה לצורה הקנונית: $-4c^2V_{sq} = F(x,t)$

אצלנו: $c = 2, x = \frac{s+q}{2}, t = \frac{-s+q}{4}$

והמשוואה הקנונית המתאימה: $-16V_{sq} = \frac{s+q}{2} + \frac{-s+q}{4}$

$$V_{sq} = -\frac{s}{64} - \frac{3q}{64}$$

ע״י אינטגרציה כפולה נקבל:

$$v(s,q) = -\frac{3q^2 s + s^2 q}{128} + F(s) + G(q)$$

נחזור למשתנים המקוריים:

$$u(x,t) = -\frac{3(x+2t)^2(x-2t) + (x-2t)^2(x+2t)}{128} + F(x+2t) + G(x-2t)$$

נסמן $\bar{v}(x,t)=F(x+2t)+G(x-2t)$

$\bar{v}(x,t)$ הוא סכום של גל נסוג וגל מתקדם לכן $\bar{v}(x,t)$ הוא פתרון של המד״ח ההומוגנית (ואותו ניתן למצוא כמו בדרך הראשונה – דרך נוסחת דלמבר למשוואה הומוגנית).

הוכחת טענה

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t), -\infty<x<\infty, \qquad 0<t$$
$$u(x,0)=f(x), \qquad u_t(x,0)=g(x) \quad x>0$$

הוכיחו כי אם f,g פונקציות אי זוגיות ו $F(x,t)$ פונקציה אי זוגית במשתנה x אז פתרון הבעיה $u(x,t)$ הוא פונקציה אי זוגית במשתנה x.

פתרון

הוכחת בעיה מוצגת היטב – יציבות הפתרון

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t), -\infty<x<\infty, \qquad 0<t\le T, \qquad 0<T$$
$$u(x,0)=f(x), \qquad u_t(x,0)=g(x) \quad x>0$$

$$g\in C^1, F, f\in C^2$$

ידוע שלבעיה קיים פתרון יחיד.

האם הבעיה מוצגת היטב, נמקו את תשובתכם.

פתרון