פתרונות וידאו מלאים באתר

חשבוניה

קישור לאתר

# שיעור 9

## כלל לופיטל – ברנולי

תהינה $f(x)$ ו - $g(x)$ גזירות בסביבת $x_0$ כך ש – $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ ו - $g'(x) \neq 0$

בסביבת $x_0$. אזי אם $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ אז גם $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

הערות

- $L$ יכול להיות שווה $\pm\infty$
- המשפט נכון גם לגבולות חד צדדיים.
- המשפט נכון גם $x \to \pm\infty$
- המשפט נכון גם $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

קישור לאתר

תרגילים

1. הוכיחו כי לכל פולינום $p(x)$ מתקיים: $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$

פתרון

יהי $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$ פולינום. נראה שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$.

ואז

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a_0}{e^x} + a_1 \frac{x}{e^x} + \cdots + a_n \frac{x^n}{e^x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{k!}{e^x} = 0$$

support@heshbonia.co

קישור לאתר

.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)}{sinx}\overset{\text{לופיטל}}{\underset{"\frac{0}{0}"}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cdot cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{cosx}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)-cos\left(\frac{1}{x}\right)}{cosx}=\lim_{x\to 0}2x\frac{sin\left(\frac{1}{x}\right)}{cosx}-\lim_{x\to 0}\frac{cos\left(\frac{1}{x}\right)}{cosx}$$

הגורם הראשון שווה 0 (שואפת לאפס כפול פונקציה חסומה), אבל לגורם השני אין גבול

לופיטל לא עובד, ננסה בדרך אחרת

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)}{sinx}=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{x}{sinx}\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)=0\cdot 1\cdot\begin{pmatrix}\text{פונקציה}\\ \text{חסומה}\end{pmatrix}=0$$

קישור לאתר

.3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\overset{\text{לופיטל}}{\underset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

חזרנו לביטוי דומה להתחלה, לופיטל לא עוזר ננסה דרך אחרת

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\frac{1}{\sqrt{0+1}}=1$$

קישור לאתר

.4 $\lim_{x\to 0}(1+sinx)^{\frac{1}{x}}$

כדי להשתמש בלופיטל צריך לעבור לצורה של מנה, נשתמש בכך שמתקיים :

$$a^b=e^{lna^b}=e^{blna}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+sinx)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{ln(1+sinx)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}ln(1+sinx)}$$

היות ו - $e, ln$ הן פונקציות רציפות, אפשר להעביר את הגבול למעריך :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}ln(1+sinx)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+sinx)}{x}\underset{"\frac{0}{0}"}{\overset{\text{לופיטל}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+sinx}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+sinx}=\frac{1}{1+0}=1$$

לסיכום

$$\lim_{x\to 0}(1+sinx)^{\frac{1}{x}}=e^{1}=e$$

קישור
לאתר

.5

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{sinx}}=$$

קישור
לאתר

.6

$$\lim_{x\to 0}(1+x^{2})^{\frac{1}{e^{x}-1-x}}=$$

קישור לאתר

.7

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{20}}=$$

קישור לאתר

.8 חשבו

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=$$

פתרון

הגבול הוא מהצורה " $\frac{0}{0}$ " אבל הפעם בסדרות ולא בפונקציות ולכן לא ניתן להשתמש בלופיטל.

לכן נשתמש בהיינה ונמצא מה הגבול של

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2+x^3}=$$

אם לפונקציה קיים גבול אז לפי היינה גם לביטוי שלנו קיים אותו גבול.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2+x^3}\overset{\text{לופיטל}}{\underset{"\frac{0}{0}"}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{2x+3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x(2+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{(2+3x)}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

קישור
לאתר

.9

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+logx\right)=$$

קישור
לאתר

.10

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{lnx}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-lnx}{(x-1)lnx}\right)\underset{"\frac{0}{0}"}{\overset{\text{לופיטל}}{=}}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{lnx+1-\frac{1}{x}}\right)=$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{xlnx+x-1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{xlnx+x-1}\right)\underset{"\frac{0}{0}"}{\overset{\text{לופיטל}}{=}}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{lnx+1+1}\right)=\frac{1}{2}$$

קישור לאתר

11.

חשבו $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tanx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

קישור לאתר

## שאלות ממבחנים

1.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{ln\,(x)}-\frac{3}{x^3-1}\right)=$$

תשובה: $\frac{3}{2}$.

.2

נתונה פונקציה f הגזירה פעמיים ברציפות בכל נקודה. חשבו (התשובה תלויה ב-f).

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(8+x)-2f(8)+f(8-x)}{x^2}$$

תשובה : $f''(8)$.

.3

$$\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(x) =$$

*תשובה : 0.*

.4

מצאו את המספר $b$ עבורו הגבול הבא קיים (וסופי) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin(2x)}{x^3}+\frac{b}{x^2}\right)$

מהו הגבול במקרה זה?

תשובה: הגבול שווה $-\frac{4}{3}$ , $b=-2$

.5

$$\lim_{x\to 0}(cos(x))^{\frac{1}{sin^2(x)}}=$$

תשובה: $e^{-\frac{1}{2}}$.

*.6*

$$\lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{ln(x)}}$$

*תשובה:* $e^2$

*.7*

$$\lim_{x\to 0}(cos(3x))^{\frac{1}{tg^2(x)}}$$

תשובה: $e^{-\frac{9}{2}}$

*שאלות נוספות ממבחנים*

*.1*

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, |x|>1 \\ e^{-1}, |x|\le 1 \end{cases}$ .

לפניכם 5 טענות, 4 מהן נכונות ואחת לא נכונה. מהי הטענה ה**לא נכונה**?

א. $f(x)$ פונקציה זוגית.

ב. $f(x)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$ .

ג. $f(x)$ אינה גזירה בכל $\mathbb{R}$ .

ד. הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה אופקית של $f(x)$ ב $\infty$.

ה. הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה אופקית של $f(x)$ ב $-\infty$.

תשובה: ג

.2

$$f(x)=|x|e^{\frac{1}{x}}$$

א. מצאו ומיינו את כל נקודות האי-רציפות של הפונקציה הנתונה.

ב. חישבו את כל האסימפטוטות של הפונקציה הנתונה.

תשובה: 0 אי רציפות עקרית, 0 אסימ' אנכית אין אופקית, משופעות: $y=x+1$ $y=-x-1$

.3

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\right)^{\tan x}$$

א. $0$ ב. $1$ ג. $e$ ד. $\infty$ ה. לא קיים

תשובה: ב

.4

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

א. $0$ ב. $1$ ג. $e$ ד. $\infty$ ה. לא קיים

תשובה: ג.

.5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-x^2}{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}$$

תשובה: $-12$

.6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{|x|}}$$

תשובה: $0$.

.7

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sqrt{x}} \cos 2x}{e^x} =$$

תשובה : 1.

8.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+2n-5}{3n^2-4n+1}\right)^n$$

א. $\infty$ ב. $1$ ג. $e^2$ ד. $\frac{1}{e^2}$ ה. $e$

תשובה : ג.