חשבוניה

פתרונות וידאו מלאים באתר

Adj (צמוד קלאסי)

קישור לאתר

A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$. המינור i,j של A מסומן ע״י M_{ij}. כל איבר

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^t$$

דוג׳:

קישור לאתר

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ מצאו $adj(A)$.

פתרון

$$adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

קישור לאתר

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ מצאו $adj(A)$.

פתרון

$$adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 7 \\ 12 & 4 & -6 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

קישור לאתר

משפט $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = |A| \cdot I$ ז"א המטריצות מתחלפות בכפל והתוצאה היא מטריצה סקלרית.

מסקנה אם A הפיכה אז $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A).}$

קישור לאתר

תרגילים

1. תהי A הפיכה, בטאו את $|adj(A)|$ באמצעות $|A|$ כאשר A מסדר $n \times n$.

פתרון

נצא מהמשפט: $A \cdot adj(A) = |A| \cdot I$

נפעיל דטר': $|A| \cdot |adj(A)| = \big||A| \cdot I\big| = |A|^n \cdot |I|$

$$|A| \cdot |adj(A)| = |A|^n \quad \rightarrow \quad |adj(A)| = |A|^{n-1}$$

הערה: אם A לא הפיכה עדיין מתקיים $|adj(A)| = |A|^{n-1} = 0$

הוכחה:

- אם $A \neq 0$ לא הפיכה, נניח בשלילה ש $adj(A)$ הפיכה.

  לפי המשפט: $A \cdot adj(A) = |A| \cdot I = 0 \quad /[adj(A)]^{-1}$

  $A = 0$ בסתירה לנתון.

- אם $A = 0$ אז $adj(A) = 0$.

קישור לאתר

2.

A הפיכה א) הוכיחו $adj(A^{-1}) = [adj(A)]^{-1}$

ב) חשבו $|adj\ adj(A)|$

ג) חשבו $adj\ adj(A)$

פתרון

א) היות ו A הפיכה קיימת A^{-1} ולכן לפי המשפט (נציב במקום A את A^{-1})

$$A^{-1} \cdot adj(A^{-1}) = |A^{-1}| \cdot I \ \ /A$$

$$\boldsymbol{adj(A^{-1})} = |A^{-1}| \cdot \mathrm{A} = |A|^{-1} \cdot \mathrm{A} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{|A|}} \cdot \boldsymbol{A}$$

מצד שני : נצא מהמשפט : $A \cdot adj(A) = |A| \cdot I$

נפעיל על 2 אגפי המשפט מטריצה הפיכה

$$(A \cdot adj(A))^{-1} = (|A| \cdot I)^{-1}$$

$$[adj(\mathrm{A})]^{-1} \cdot A^{-1} = |A|^{-1} \cdot I^{-1} \ \ /A$$

$$\boldsymbol{[adj(\mathrm{A})]^{-1}} = |A|^{-1} \cdot \mathrm{A} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{|A|}} \cdot \boldsymbol{A}$$

ב)

ראינו $|adj(A)| = |A|^{n-1}$

נציב $A = adj(A)$

$$|adjadj(A)| = |adjA|^{n-1} = (|A|^{n-1})^{n-1} = |A|^{(n-1)^2}$$

ג.

נציב במשפט $A \cdot adj(A) = |A| \cdot I$ את המטריצה $adj(A)$ ונקבל :

$$adjA \cdot adj(adjA) = |adjA| \cdot I$$

ראינו $adj(A) = |A| \cdot A^{-1}$. נציב ונקבל :

$$|A| \cdot A^{-1} \cdot adj(adjA) = |adjA| \cdot I$$

בנוסף : $|adj(A)| = |A|^{n-1}$

$$|A| \cdot A^{-1} \cdot adj(adjA) = |A|^{n-1} \cdot I \quad /|A|$$

$$A^{-1} \cdot adj(adjA) = |A|^{n-2} \cdot I \quad /A$$

$$adj(adjA) = |A|^{n-2} \cdot A$$

קישור לאתר

שאלות ממבחנים

1. יהיו $A,B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ הפיכות המקיימות

$$B^TA^{-1} = 2I \ , \ \ ABA^T = I$$

אזי $\left|adj(\frac{1}{2}B)\right| + |adj(A^{-1})|$ שווה ל:

א. 8 ; ב. $\frac{17}{4}$; ג. $\frac{1}{2}$; ד. $\frac{5}{4}$; ה. 2

תשובה נכונה : ב.

2. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת $det(A) = 1$ אזי $det(A^{-1} + adj(A))$ שווה ל:

א. 2 ; ב. 1 ; ג. 2^n ; ד. $\frac{1}{2}$; ה. $\frac{1}{2^n}$

תשובה נכונה ג.

3. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית והפיכה, אז גם $adj(A)$ סימטרית והפיכה.

הטענה נכונה

4. אם $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה ו- $\alpha \in \mathbb{R}$, אזי $adj(\alpha A) = \alpha \cdot adj(A)$.

הטענה לא נכונה

5.

תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימת $det(A) = 3$ אזי $det\left(adj\left(adj(\frac{1}{3}A^2)\right)\right)$ שווה ל:

א. 9 ; ב. 1 ; ג. $\frac{1}{9}$; ד. 81 ; ה. $\frac{1}{81}$

תשובה נכונה: ה.

6. תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימת $det(A) = -\frac{1}{4}$ אזי $det(A^{-1} + 2\cdot adj(A))$ שווה ל:

א. $-\frac{1}{2}$; ב. $-3\frac{1}{2}$; ג. $-3\frac{7}{8}$; ד. $-\frac{1}{8}$; ה. $\frac{1}{2}$

תשובה נכונה: א.

קישור לאתר

מטריצות אלמנטריות

הגדרה: מט' אלמנטריות היא מטריצה שהתקבלה ממט' היחידה ע"י ביצוע פעולה אלמנטרית אחת.

קישור לאתר

משפט: ביצוע פעולה אלמנטרית אחת על שורה של מט' שקולה לכפל במט' אלמנטרית מתאימה מצד שמאל.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}}_{A} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

קישור לאתר

אם A הפיכה ניתן להכפיל: $I = E_k \cdot E_{k-1} \cdot \cdots E_1 \cdot A$

מתחילים מהפעולה האחרונה

מצד ימין ב A^{-1} ולקבל:

$$I \cdot A^{-1} = E_k \cdot E_{k-1} \cdot \cdots E_1 \cdot A \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = E_k \cdot E_{k-1} \cdot \cdots E_1$$

ראינו שיטה לחישוב A^{-1} $(A|I) \to \cdots (I|A^{-1})$

קישור לאתר

תרגיל

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ א) מצאו את A^{-1}. ב) כתבו את A^{-1} כמכפלה של מטר' אלמנטריות.

פתרון

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{E_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow{E_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&-2&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow{E_3}$$

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\qquad E_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\qquad E_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1/2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&3/2&-1/2\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}=A^{-1}=E_3\cdot E_2\cdot E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}$$