פתרונות וידאו מלאים באתר

חשבוניה

שיעור 11

נושאי התרגול

- אינטגרל מסוים
- הערכת אינטגרלים
- המשפט היסודי של החדו"א
- אורך עקום

קישור לאתר

אינטגרל מסוים

פעם קודמת ראינו שאינטגרל לא מסוים הוא פונקציה קדומה. הפעם נשתמש באינטגרל ככלי לחישוב שטחים.

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{matrix}\text{שטח בין} \\ \text{הפונקציה וציר ה} - x\end{matrix}$$

הערות

- פונקציה אינטגרבלית משמעותה ש $\int_a^b f(x)dx =$ ניתן לחישוב.
- הקשר בין האינטגרל המסוים לאינטגרל לא מסוים נובע מהמשפט הבא:
-

נוסחת ניוטון – לייבניץ

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ותהי $F(x)$ הפונקציה הקדומה שלה, אזי:

קישור לאתר

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- $\int_a^a f(x)dx = 0$

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx)$
- $|b-a| \cdot \min_{a\le x\le b} f(x) \le \int_a^b f(x)dx \le |b-a| \cdot \max_{a\le x\le b} f(x)$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

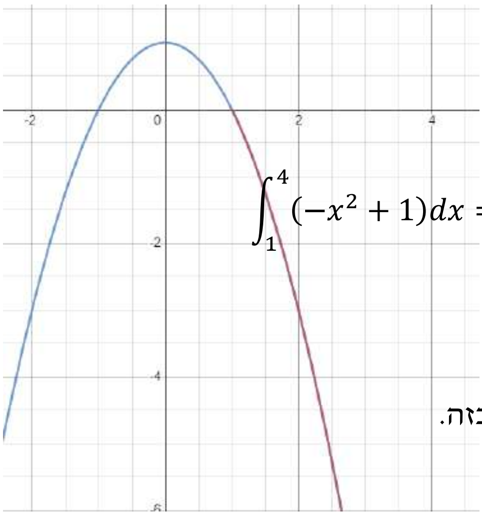
אם $f(x)$ אינטגרבלית אזי גם $|f(x)|$ אינטגרבילית

- פונקציה חסומה שיש לה מספר סופי של נקודות אי רציפות היא אינטגרבילית.

קישור לאתר

תרגילים

.1



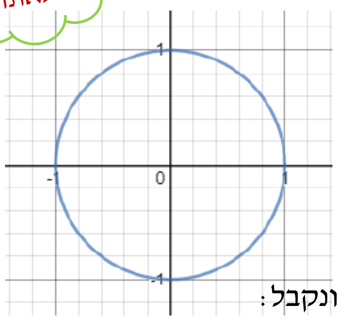
$$\int_1^4 (-x^2+1)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^4 = \left(-\frac{64}{3}+4\right) - \left(-\frac{1}{3}+1\right) = -18$$

נשים חב שקבלנו תוצאה שלילית, למרות שחשבנו שטח!

כי הפונקציה בתחום הנ"ל נמצאת מתחת לציר ה - x ולא התחשבנו בזה.

.2

קישור לאתר



חשבו שטח עיגול ברדיוס 1 סביב הראשית.

פתרון

משוואת המעגל הקנוני ברדיוס 1 היא: $x^2 + y^2 = 1$.

קשת המעגל היא לא פונקציה, היא מורכבת משתי פונקציות. נבודד את ה $-y$ ונקבל:

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

החצי העליון הוא $y=\sqrt{1-x^2}$ והחצי התחתון הוא $y=-\sqrt{1-x^2}$.

כדי לחשב את השטח נוכל לחשב את השטח בין הפונקציה העליונה לתחתונה או לחשב את השטח

בין חצי הקשת העליונה עד ציר ה - x ולהכפיל ב – 2.

נשתמש בדרך השנייה:

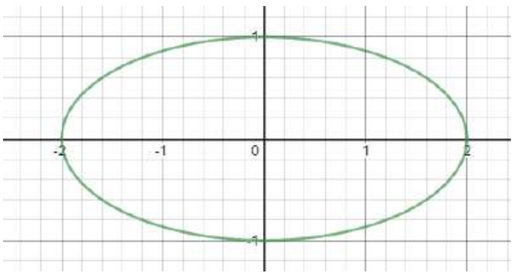
$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \underset{\substack{x=sint\\dx=costdt\\-1\to-\frac{\pi}{2}\\1\to\frac{\pi}{2}}}{=} 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-sin^2t}\cdot costdt$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|cost|\cdot costdt \underset{\substack{cost\\\text{חיובי בתחום}}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2cos^2tdt \underset{2cos^2=1+\cos(2t)}{=}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[1+cos\,(2t])dt=\left[t+\frac{1}{2}sin\,(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)=\pi$$

קישור לאתר

.3



חשבו שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תשובה סופית πba

קישור לאתר

.4

תהי $f(x)$ פונקציה אי זוגית אינטגרבלית הוכיחו כי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

במילים אחרות : אינטגרל על פונקציה אי זוגית בתחום סמטרי סביב ה- 0 שווה 0.

פתרון

קישור לאתר

.5

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{sin(x^3)(x^2+2)}{e^{x^2}cosx}dx =$$

פתרון

נראה שהאינטגרד (הפונקציה בתוך האינטגרל) היא אי זוגית ולכן מהתרגיל הקודם נקבל שהתוצאה שווה 0.

נגדיר

$$f(x) = \frac{sin(x^3)(c+2)}{e^{x^2}cosx}$$

$$f(-x) = \frac{sin[(-x)^3]((-x)^2+2)}{e^{(-x)^2}cos\,(-x)} = \frac{sin[-x^3](x^2+2)}{e^{x^2}cos\,(x)} = -\frac{sin(x^3)(x^2+2)}{e^{x^2}cosx} = -f(x)$$

קישור לאתר

בצורה דומה

$$\int_{-1}^{1} \frac{3x^5-4x^3+5x}{cos^2x}dx = 0$$

המכנה הוא פונקציה זוגית והמונה הוא פונקציה אי זוגית ולכן כל הביטוי הוא פונקציה אי זוגית בתחום סימטרי סביב הראשית ולכן התוצאה 0.

קישור
לאתר

.6

תהי $f(x)$ פונקציה זוגית אינטגרבלית הוכיחו כי

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

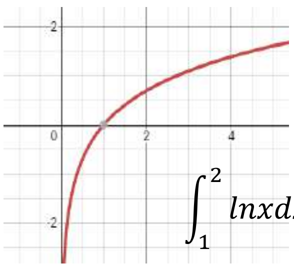
פתרון.

קישור
לאתר

.7

חשבו את השטח המוגבל בין $f(x) = lnx$ וציר ה $x -$ בקטע $[1,2]$.

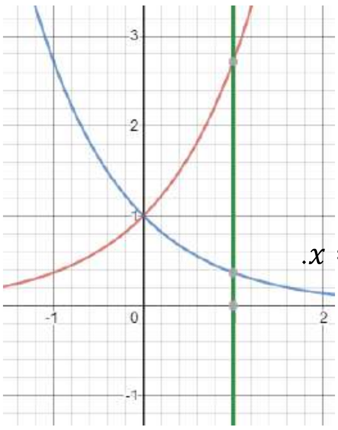
פתרון



$$\int_{1}^{2} lnxdx \underset{\text{עשינו בפרק הקודם}}{=} [xlnx - x]_1^2 = [(2ln2 - 2) - (1ln1 - 1)] = 2ln2 - 1$$

אם תחום D חסום מלמעלה ע״י גרף של $f(x)$ ומלמטה עי $g(x)$ כאשר x בקטע $[a,b]$ אזי שטח התחום D הוא:

$$S(D) = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$



קישור
לאתר

.8

חשבו את השטח החסום ע״י $y = e^{-x}, y = e^{x}$ מנקודת המפגש שלהם ועד $x = 1$.

פתרון

בנקודת החיתוך מתקיים:

$$e^x = e^{-x} \quad \rightarrow \quad x = -x \quad \rightarrow x = 0$$

$$S(D)=\int_0^1 [e^x-e^{-x}]dx=[e^x+e^{-x}]_0^1=[(e^1+e^{-1})-(e^0+e^{-0})]$$

$$=e^1+e^{-1}-2$$

קישור לאתר

.9

$$\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}} \underset{\substack{t=\sqrt{3x+1},\, x=\frac{t^2-1}{3} \\ dx=\frac{2}{3}tdt \\ 0\to 1, \\ 5\to 4}}{=} \int_1^4 \frac{\frac{2}{3}tdt}{2\frac{t^2-1}{3}+t}=\int_1^4 \frac{2tdt}{2t^2+3t-2}$$

$$=\int_1^4 \frac{2tdt}{(t+2)(2t-1)} \underset{\text{פירוק לשברים חלקיים}}{=} \frac{4}{5}\int_1^4 \frac{dt}{t+2}+\frac{2}{5}\int_1^4 \frac{1dt}{2t-1}=$$

$$\frac{4}{5}[\ln(t+2)]_1^4+\frac{2}{5}[\ln(2t-1)]_1^4=\frac{4}{5}[ln6-ln3]+\frac{2}{5}[ln7-ln1]$$

$$=\frac{4}{5}ln2+\frac{2}{5}ln7$$

קישור לאתר

.10

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx=\cdots=\frac{\pi}{16}$$

קישור לאתר

הערכת אינטגרלים

קישור לאתר

אם $g(x) \leq f(x)$ לכל $x \in [a,b]$ אזי: $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

1. העריכו את האינטגרל

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{x} dx$$

פתרון

זהו אינטגרל שאנחנו לא יודעים למצוא לו פונקציה קדומה, לכן נשתמש בשיטת הערכת אינטגרלים.

הערכה א

בקטע:

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

מתקיים

$$\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x} \leq \frac{sinx}{x} \leq \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{x} \leq \frac{sinx}{x} \leq \frac{1}{x}$$

ולכן

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{x} dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} [lnx]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{x} dx \leq [lnx]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[ln\frac{\pi}{2}-ln\frac{\pi}{4}\right] \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{x}dx \le \left[ln\frac{\pi}{2}-ln\frac{\pi}{4}\right]$$

$$0.49 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot ln2 \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{x}dx \le ln2 \approx 0.693$$

הערכה ב

בהערכה הקודמת החלפנו את המונה בערך מספרי הפעם נעשה זאת למכנה. בתחום

$$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

מתקיים

$$\frac{sinx}{\frac{\pi}{2}} \le \frac{sinx}{x} \le \frac{sinx}{\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot sinx \le \frac{sinx}{x} \le \frac{4}{\pi}\cdot sinx$$

ולכן

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\cdot sinxdx \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{x}dx \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{\pi}\cdot sinxdx$$

$$0.45 \approx \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{x}dx \le \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.9$$

ניתן לראות כי הערכה זו פחות טובה מההערכה הקודמת.

קישור
לאתר

המשפט היסודי של החדו"א

תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבלית ב - $[a,b]$ ותהי ב נקודה קבועה כלשהי בקטע. נגדיר פונקציה חדשה $F(x)=\int_c^x f(x)dx$. אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x_0\in[a,b]$ אזי $F(x)$ גזירה ב - x_0 ו – $F'(x_0)=f(x_0)$.

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבלית ו - תהי $g(x),h(x)$ פונקציה גזירות תהי

$$F(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(x)dx$$

אזי

$$F'(x)=f\big(h(x)\big)\cdot h'(x)-f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

קישור
לאתר

תרגילים

1. גזרו

$$F(x)=\int_{x^2+1}^{e^{x^2}} sin\,(t)dt$$

פתרון

נציב בנוסחה : $F'(x)=f\big(h(x)\big)\cdot h'(x)-f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$

כאשר

$$h(x)=e^{x^2},\qquad g(x)=x^2+1,\quad f(x)=sin\,(x)$$

$$F'(x)=sin\big(e^{x^2}\big)\cdot 2xe^{x^2}-sin(x^2+1)\cdot 2x=2x\big[sin\big(e^{x^2}\big)\cdot e^{x^2}-sin(x^2+1)\big]$$

קישור לאתר

1.* גזרו

$$F(x)=\int_{x^3}^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

תשובה סופית

$$F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^4}}\cdot 2x-\frac{1}{\sqrt{1+(x^3)^4}}\cdot 3x^2$$

קישור לאתר

1.** גזרו

$$F(x)=\int_{3}^{\int_1^x sin^3 t dt}\frac{dt}{1+sin^6 t+t^2}$$

פתרון

קישור לאתר

2. חשבו

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t}{cost}dt}{sin^2 x}$$

פתרון

הגבול הזה הוא מהצורה " $\frac{0}{0}$ " ולכן נשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t}{cost}dt}{sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{cosx}}{2sinxcosx}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx}\cdot\frac{1}{2cos^2x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

קישור לאתר

.2* חשבו

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2-3x} e^{t^2}dt}{x}$$

תשובה סופית : -3

קישור לאתר

.3

תהי $F(x)=\int_x^{x+1} e^{t^2}dt$

א. הראו $F(x)>0$ לכל x ממשי.

ב. חשבו את $F'(x)$ לכל x ומצאו נקודות קיצון מקומית של $F(x)$.

ג. הראו $\lim_{x\to\infty} F(x)=\infty$

פתרון

א. לכל t ממשי מתקיים $e^{t^2}\ge e^0=1$ ולכן לכל x ממשי

$$F(x)=\int_x^{x+1} e^{t^2}dt \ge F(x)=\int_x^{x+1} 1dt=1>0$$

ב.

$$F'(x)=e^{(x+1)^2}-e^{x^2}=e^{x^2}(e^{2x+1}-1)$$

$e^{x^2}>0$ ולכן $F'(x)>0$ כאשר $e^{2x+1}-1>0$ ז״א $2x+1>0$ או $x>-\frac{1}{2}$

ו - $F'(x)<0$ כאשר $x<-\frac{1}{2}$. לכן $x=-\frac{1}{2}$ היא נקודת מינימום של הפונקציה.

ג.

לכל $t\ge x\ge 0$ מתקיים $e^{t^2}\ge e^{x^2}$ ולכן :

$$F(x)=\int_x^{x+1} e^{t^2}dt \geq \int_x^{x+1} e^{x^2}dt = e^{x^2}\int_x^{x+1} 1dt = e^{x^2}(x+1-x) = e^{x^2}$$

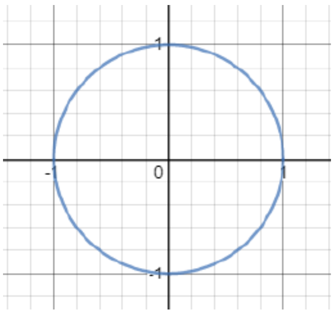
מכיון ש $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2}=\infty$ לכן גם $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=\infty$.

ב

קישור לאתר

חישוב של אורך עקום

בהינתן עקום (גרף של $f(x)$) אורכו יהיה: $L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$.



קישור לאתר

תרגילים

1. חשבן את אורך שפת העגול שמרכזו בראשית ורדיוסו 1.

משוואת המעגל היא: $x^2+y^2=1$.

נחשב פעמיים את אורך הקשת העליונה שמשוואתה היא $y=\sqrt{1-x^2}$.

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \rightarrow \quad (y')^2=\frac{x^2}{1-x^2}$$

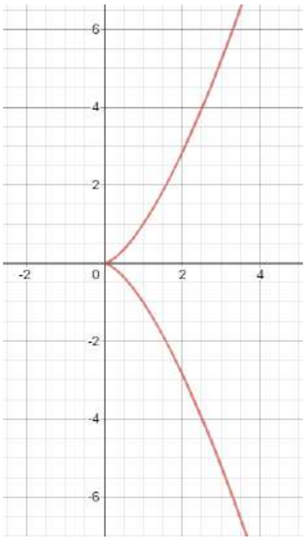
$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}dx = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx =$$

$$2\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2[arcsinx]_{-1}^{1} = 2[arcsin(1)-arcsin(-1)] =$$

$$=2\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=2\pi$$

קישור לאתר

.2



חשבו את אורך העקום הנתון ע"י $0 \le x \le 4$ $y^2 = x^3$.

תשובה סופית:

$$\frac{16}{27}[10^{1.5} - 1]$$

קישור לאתר

שאלות ממבחנים

.1

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} =$$

תשובה סופית: $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

.2

$$\int_0^{\infty} t^3 e^{-t^2} dt =$$

תשובה סופית: $\frac{1}{2}$

3.

$$\int_{0}^{2\pi} cos^4\, t\, dt = \int_{0}^{2\pi} sin^4\, t\, dt$$

הטענה נכונה

4.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + sin^2\, x}{cos\, x}\, dx =$$

תשובה סופית: $-\frac{\sqrt{2}-1}{2} + ln\left|\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right| - ln\left|\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right|$

5. סמנו את האפשרות הנכונה

א. אם $f(x)$ גזירה ב-0 אז $|f(x)|$ אינה גזירה ב-0

ב. אם $|f(x)|$ גזירה בכל נקודה אז $f(x)$ רציפה בכל נקודה

ג. $\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+1} \frac{t^2+1}{t^2+20t+8} dt = 1$

ד. אם $f:[a,b] \to [a,b]$ אז יש $a \le c \le b$ עבורו $f(c) = c$.

ה. $\lim_{x\to\infty} \frac{sin(x)}{x} = 1$

תשובה נכונה: ג.

6. סמנו את האפשרות הנכונה

א. אם $|f(x)|$ אינה גזירה ב-0 אז $f(x)$ אינה גזירה ב-0

ב. אם $|f(x)|$ גזירה בכל נקודה אז $f(x)$ רציפה בכל נקודה

ג. $\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+1} \frac{t+11}{3t^2+5t+4} dt = 1$

ד. אם $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ רציפה וגם $f(x) \le \sqrt{x} + 10$ על $[0,\infty)$, אז יש $0 \le c$ עבורו $f(c) = c$.

ה. $\lim_{x\to\infty} \frac{sin(x)}{x} = 1$

תשובה נכונה: ד

שאלות נוספות ממבחנים

1. ערך האינטגרל $\int_0^{\ln 2} e^x f(3e^x)dx$ שווה ל-

א. $3\int_0^{\ln 2} f(t)dt$ ב. $3\int_0^{\ln 2} tf(t)dt$ ג. $\frac{1}{3}\int_3^6 f(t)dt$ ד. $\frac{1}{3}\int_3^6 tf(t)dt$ ה. $3\int_1^2 f(t)dt$

תשובה נכונה: ג.

.2

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה מכל סדר, המקיימת:

$$f(3)=f'(3)=8,\quad f(1)=f'(1)=6,\quad f(0)=f'(0)=0$$

אזי ערך האינטגרל $\int_0^1 xf''(2x+1)dx$ שווה ל-

א. 0 ב. 2 ג. $\frac{3}{2}$ ד. $\frac{5}{2}$ ה. $\frac{7}{2}$

תשובה נכונה: ה.

.3

אם $y(x)$ היא פונקציה גזירה וחיובית המקיימת $y(5) = 3$, $y(2) = 1$ אזי הערך של האינטגרל

$$\int_2^5 y\,'(x) \cdot ln(y(x))\,dx$$

א. $5\,ln\,3 - 4$ ב. $3\,ln\,3 - 2$ ג. 2 ד. $3\,ln\,3 - 3$ ה. $\frac{(ln\,3)^2}{2}$

תשובה נכונה: ב.

.4

הגבול $\lim_{n\to\infty} \int_a^b cos(nx)\,dx$ שווה ל-0 לכל $a,\ b$ ממשיים.

הטענה נכונה

שאלות ממבחנים עם המשפט היסודי של החדו"א

.1

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2} sin\sqrt{t}\,dt$$

תשובה סופית: $\frac{2}{3}$.

.2

א. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה על הישר. יהי $T>0$. נגדיר $G(x)=\int_x^{x+T}f(t)dt$. מצאו $G'(x)$.

תשובה סופית: $f(x+T)-f(x)$.

ב. נתונה פונקציה רציפה על כל הישר ומחזורית עם מחזור $T>0$, כלומר $f(x+T)=f(x)$ לכל x.

הוכיחו כי $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T}f(x)dx$ לכל מספר a.

.3

חשבו $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{G(x)}$ כאשר $G(x)=x$ ו-

$$F(x)=\int_0^x \frac{e^{2t}-2e^t+1}{2\,cos(3t)-2\,cos(2t)+\cos(t)}\,dt$$

תשובה סופית : 0.

.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dt}{\sin t}}{\int_0^x \arctan t\,dt}$$

א. $\ln 5$ ב. $\ln\sqrt{3}$ ג. ∞ ד. $\ln 4$ ה. 0

תשובה נכונה : ב.

.5

נתון כי $f(x)$ רציפה ומקיימת $f(t) \geq t^2$ לכל t, בנוסף שלכל $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ השטח הכלוא בין הגרף של f והגרף של t^2 מעל לקטע $[0, x]$ הוא $sin^2\, x$.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

א. $\frac{\pi}{2}$ ב. π ג. 1 ד. $\frac{\pi^2}{4}$ ה. אין מספיק מידע בשביל לדעת

תשובה נכונה: ד.

.6

נתון כי $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות ועולות ממש על כל הישר המקיימות

$$f(0) = g(0) = 0$$

נגדיר

$$h(x) = \int_{-1}^{g(x)} f(t)dt$$

א. מצאו את $h'(x)$.

תשובה: $h'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$

ב. הוכיחו כי $h(x)$ עולה ממש בקטע $[0, \infty)$ ויורדת ממש בקטע $(-\infty, 0]$.

ג. הוכיחו כי $x = 0$ מינימום מוחלט של הפונקציה $h(x) = \int_{-1}^{g(x)} f(t)dt$.

.7

מצאו פולינום טיילור מסדר 2 סביב הנקודה $a = 0$ של

$$F(x) = \int_{tg(2x)}^{e^x-1} cos(t^2)dt$$

תשובה סופית: $T_2(x) = -x + \frac{x^2}{2}$

.8

נתון כי $F(x) = \int_0^x e^{t^2}dt + 1$

א. $F(x)$ קמורה על $(-\infty, \infty)$

ב. למשוואה $F(x) = 0$ יש שני פתרונות

ג. הפונקציה $F(x)$ הפיכה ומתקיים כי $(F^{-1})'(1) = 1$

ד. $F(1) = 5$

ה. $F(x) = F(-x)$ לכל x

תשובה נכונה: ג.

.9

נתונה המשוואה $\int_1^x t^2\, ln^2(t)\, dt = 1/x$ עבור $0 < x$

א. למשוואה אין פתרון בקטע $(0, \infty)$

ב. למשוואה פתרון אחד בקטע $(0, \infty)$

ג. למשוואה שני פתרונות בקטע $(0, \infty)$

ד. למשוואה שלושה פתרונות בקטע $(0, \infty)$

תשובה נכונה: ב.

.10

נתון כי $F(x) = \int_0^{x^3} cos\,(t^2) dt$

א. $F(x)$ קמורה על $(-\infty, \infty)$

ב. $x = 0$ נקודת פיתול של $F(x)$

ג. $F(x)$ עולה על $(-\infty, \infty)$

ד. $F(1) = 5$

ה. $F(x) = F(-x)$ לכל x

תשובה נכונה: ב.

.11

נתון כי $F(x)=\int_0^{x^2} e^{t^2}dt$

א. $F(x)$ קמורה על $(-\infty,\infty)$

ב. $x=0$ נקודת פיתול של $F(x)$

ג. $F(x)$ עולה על $(-\infty,\infty)$

ד. $F(1)=8$

ה. $F(x)=-F(-x)$ לכל x

תשובה נכונה: א.

.12 סמנו את האפשרות הנכונה

א. אם $|f(x)|$ גזירה ב-0 אז $f(x)$ גזירה ב-0

ב. אם $f(x)$ גזירה בכל נקודה אז $|f(x)|$ רציפה בכל נקודה

ג. $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+1}\frac{t^2+t+11}{10t^2+9t+14}dt=1$

ד. אם $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ רציפה, אז יש $c\geq 0$ עבורו $f(c)=c$.

ה. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ln(1+x)}{x}=1$

תשובה נכונה: ב.

.13

אם $f(x)$ אינטגרבילית על $[-1,1]$, בהכרח $f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$.

הטענה לא נכונה

שאלות נוספות ממבחנים

.1

$$F(x) = \int_0^{x-\sqrt{x}} t^2 \ dt$$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. למשוואה $F(x) = 0$ קיים פתרון יחיד.

ב. גבול $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x\sqrt{x}}$ שווה ל-$-\frac{1}{3}$.

ג. $x = \frac{1}{4}$ היא נקודת מקסימום מקומי של $F(x)$.

ד. $F(x)$ מונוטונית עולה (ממש) בכל תחום הגדרתה.

ה. ל-$F(x)$ יש בדיוק שתי נקודות קיצון מקומי בקטע $(0,\infty)$.

תשובה נכונה: ב.

.2

$$F(x)=\int_x^0 t\ln t\ \ dt \qquad x\in(0,\infty)$$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. הגבול $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{x\sqrt{x}}$ שווה ל $-\infty$.

ב. $x=1$ היא נקודת מקסימום מקומי של $F(x)$.

ג. $F(x)$ מונוטונית יורדת ממש בקטע $(0,\infty)$.

ד. $F(x)$ מונוטונית עולה ממש בקטע $(0,\infty)$.

ה. $F(x)$ קמורה$\cup$ בקטע $\left(\frac{1}{e},\infty\right)$.

תשובה נכונה: ב.

3.

$$F(x)=\int_0^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{t^6+1}\ \ dt$$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. $F(x)$ היא פונקציה יורדת ממש ב - $(-\infty,\ \infty)$.

ב. הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{\sqrt[3]{x}}$ שווה ל-1.

ג. לפונקציה $F(x)$ אין נקודות קיצון מקומי.

ד. $F(x)$ לא חד-חד ערכית ב-$(-\infty,\ \infty)$.

ה. $F(x)$ מקבלת מינימום מקומי בנקודה $x=0$.

תשובה נכונה :ב.

.4

יהי $T_3(x)$ פולינום מקלורן מסדר 3 של הפונקציה $F(x)=\int_0^x cos(t^2+t)\,dt$. אזי $T_3(2)$ שווה ל-

א. -1 ב. $\frac{2}{3}$ ג. $-\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{6}$ ה. $\frac{7}{6}$

תשובה נכונה : ב.

.5

חשבו

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x \frac{sin\,t}{t}\,dt}{cos\,x-1}$$

תשובה סופית : 2-

קישור לאתר

שאלות ממבחנים בנושא הערכת (אומדן) אינטגרלים

1. הוכיחו כי

$$. 2e^{-4} \leq \int_0^2 e^{x^2-2x-3} dx \leq 1$$

.2

$$f(x) = |log(x^2+1)| + x$$

א. האם יש לפונקציה מינימום ומקסימום מוחלטים בקטע $[-e, e]$?

תשובה: כן.

ב. הוכיחו

$$2 < \int_1^2 (log(x^2+1) + x)dx < 3$$

3. הוכיחו

$$-\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ln(sin(x))\,dx < 0$$

.4

א. הוכיחו כי $sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$.

ב. הוכיחו

$$\int_{0}^{1} sin(x^2)\,dx \geq \frac{2}{3\pi}$$

5. נתונה הפונקציה

$$f(x) = xe^{|x|} + 3x^2$$

א. הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ אינו קיים במובן הרחב

ב. $f(x)$ זוגית

ג. $f'(0)$ אינו קיים

ד. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2$

ה. $0 < \int_{-1}^{1} f(x)dx < \frac{1}{2}$

תשובה נכונה: ד.

6. הוכיחו

$$\int_0^1 \frac{arctg(x)}{1+x^2} dx \le \frac{\pi^2}{16}$$

7. הוכיחו

$$0 \le \int_{-1}^{1} \frac{cos(x)}{1+x^2} dx \le \frac{\pi}{2}$$

8. הוכיחו כי

$$\frac{1}{3} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} \le 1$$