1.54
1.1

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=\frac{9}{4} \\ x^2-4xy+y^2=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

נציב $x=yt$

$$\begin{cases} y^2t^2+2y^2t+y^2=\frac{9}{4} \\ y^2t^2-4y^2t+y^2=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2(t^2+2t+1)=\frac{9}{4} \\ y^2(t^2-4t+1)=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

מותר לחלק את המשוואות זו בזו $(y\neq 0)$

$$\frac{t^2+2t+1}{t^2-4t+1}=-3$$

$$t^2+2t+1=-3t^2+12t-3$$

$$4t^2-10t+4=0$$

$$t=2 \to y=\pm\frac{1}{2} \to \left(1,\frac{1}{2}\right) \quad \left(-1,-\frac{1}{2}\right)$$

$$t=\frac{1}{2} \to y=\pm 1 \to \left(\frac{1}{2},1\right) \quad \left(-\frac{1}{2},-1\right)$$

1-54

1ד

נציב שני ערכים של m ונראה איפה נפגשים הישרים

עבור $m=0$ נקבל את הישר $x=1$

" $m=-1$ $y=3$ לכן הנק' החשודה היא $(1,3)$

נציב במשוואה הכללית

$$(m+1)^2\cdot 1+3(m-1)m-4m^2+m-1=0$$

$$0=0$$

קיבלנו פסוק אמת, לכן הנק' המשותפת היא $(1,3)$

$\underline{1.54}$
$\underline{2}$

$$\begin{cases} \sqrt[y]{4^x} = 32\sqrt[x]{8^y} \\ \sqrt[y]{3^x} = 3\sqrt[y]{9^{1-y}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[y]{2^{2x}} = 2^5\sqrt[x]{2^{3y}} \\ \sqrt[y]{3^x} = 3\sqrt[y]{3^{2(1-y)}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 2^{5+\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3^{1+\frac{2-2y}{y}} \end{cases}$$

נשווה מעריכים:

$$\begin{cases} \frac{2x}{y} = 5+\frac{3y}{x} \\ \frac{x}{y} = 1+\frac{2-2y}{y} \end{cases}$$

נסמן $t=\frac{x}{y}$ ונקבל במשוואה הראשונה

$$2t = 5+\frac{3}{t}$$

$$2t^2-5t-3=0$$

$$t=3 \rightarrow \frac{x}{y}=3 \rightarrow x=3y$$

$$t=-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{x}{y}=-\frac{1}{2} \rightarrow y=-2x$$

נציב במשוואה השניה את $\frac{x}{y}$ שמצאנו

$\frac{x}{y}=3$: $3=1+\frac{2-2y}{y}$

$$2=\frac{2(1-y)}{y} \rightarrow y=1-y \rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{3}{2}}$$

$\frac{x}{y}=-\frac{1}{2}$: $-\frac{1}{2}=1+\frac{2(1-y)}{y} \rightarrow -3y=4-4y \rightarrow \boxed{y=4 \rightarrow x=-2}$

1.54
3

א. נעבור משיק בנק' A.

הזווית שנוצרת בין המשיק ל AO, היא 90° ולכן הנק' A היא נק' השקה משותפת למעגל הגדול ולמעגל השמאלי.
באותה דרך, נעבור משיק בנק' B ונראה שהמעגל הגדול והמעגל הימני משיקים.
נעבור משיק בנק' C $\Leftarrow$ $\sphericalangle ACE=\sphericalangle BCE=90^\circ$
ולכן 2 המעגלים הפנימיים משיקים זה לזה.

ב' O_1O_2 הוא קטע מרכזים העובר בנק' C ומאונך ל- DE.
במעגל הגדול מתקיים $DE \perp O_1C$
ולכן הוא חוצה את DE

$$O_1E^2 = EC^2 + O_1C^2$$

$$(a+b)^2 = EC^2 + (a-b)^2$$

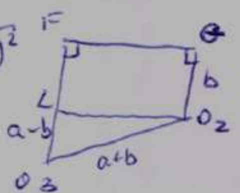
$$EC = 2\sqrt{ab}$$

$$AB = AC + CB = 2a+2b$$

$$O_1C = O_1B - CB = a+b-2b = a-b$$

$$\boxed{DE = 2EC = 4\sqrt{ab}}$$

ג'. טרפז FGO_2O_3



$$GF = O_2L = \sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2} = 2\sqrt{ab}$$

$$FS = SC = SG$$

(2 משיקים היוצאים מנק' אחת...)

$$\boxed{SG = \frac{1}{2}GF = \sqrt{ab}}$$

1.54
4

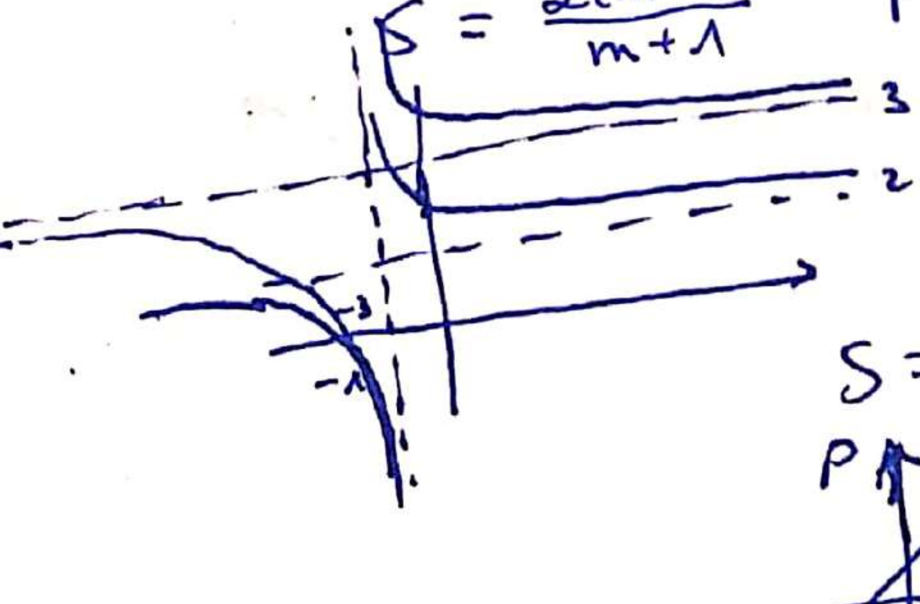
$0<\Delta$ נדרש (א)

$$0<\Delta = 4(m+3)^2-4(m+1)(3m+7)$$
$$0<(m+3)^2-(m+1)(3m+7)$$
$$0<m^2+6m+9-3m^2-10m-7$$
$$2m^2+4m-2<0$$
$$m^2+2m-1<0$$
$$\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

$$\boxed{-1-\sqrt{2}<m<-1+\sqrt{2}}$$

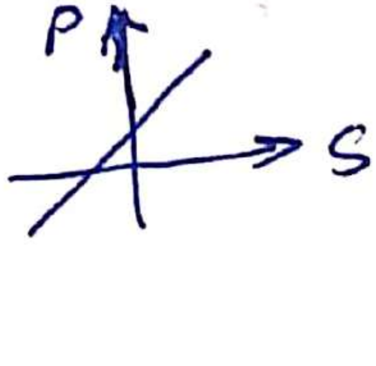
(ב)

$$S=\frac{2(m+3)}{m+1} \qquad P=\frac{3m+7}{m+1}$$



(ג)

$$S=P+1$$



1.54
5

(א) $$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1} \quad / k(k-1)$$

$$1 = A(k-1) + Bk$$

$$1 = k(A+B) - A$$

השוואת מקדמים

$$\begin{cases} k^0: & 1 = -A \\ k^1: & 0 = A+B \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \end{array}$$

(ב)

עבור $n=1$

$$\frac{1}{1^2} \leq \frac{1}{1}$$

נניח שהטענה נכונה ל n טבעי כלשהו ונראה שהיא נכונה ל $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{\text{לפי הנחה}}{\leq} \frac{2n-1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

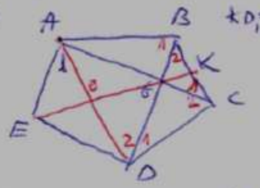
$$= 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{*}{<} 2 - \frac{1}{n+1}$$

(*) $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

לכן $-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{-1}{n+1}$

1.55

$\frac{1.54}{6}$ (א)



$\sphericalangle D_1 = \sphericalangle C_1 = \sphericalangle B_2 = 36 \quad \sphericalangle B_1 = 72^\circ = \sphericalangle D_2 = \sphericalangle C_2 \leftarrow$ שו"ש $\Delta BCD, \Delta ABC$

$\underline{AG = GD} \Leftarrow \Delta ABG \cong \Delta DCG$

$\sphericalangle CGD = \sphericalangle GCD = 72^\circ$ שו"ש ΔGCD

$\underline{GD = DC = ED = AE}$

$\leftarrow AGDE$ מרובע בעל 4 צלעות שוות הוא מעוין

(ב)

$\sphericalangle A_1 = 36^\circ \rightarrow \sphericalangle BAD = 72^\circ \rightarrow \sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 180$

$\rightarrow BC \parallel AD$

$AD \perp EG$ אלכסונים במעוין. $\sphericalangle BKG = \sphericalangle AOG = 90^\circ$ (מת' במקבילות)

$\Leftarrow GK$ ~~גובה~~ גובה במשולש שו"ש BGC הוא גם תיכון $\leftarrow EG$ עובר באמצעי BC.