1.54

1

$$\begin{cases} |x-1|+|y-5| = 1 \\ y = 5+|x-1| \end{cases}$$

נבודד $|x-1|$ מהמשוואה השנייה ונציב בראשונה

$y-5+|y-5|=1$

$y-5-(y-5)=1$ $\quad y \le 5$

$0=1$

$\emptyset$

$y-5+y-5=1$ $\quad y \ge 5$

$2y=11 \rightarrow y=5.5$

$5.5=5+|x-1|$ נציב במשוואה השנייה

$x-1=\frac{1}{2}$ $\quad$ $x-1=-\frac{1}{2}$

$x=1.5$ $\quad$ $x=0.5$

$(1.5, 5.5)$ $\quad$ $(0.5, 5.5)$

1.59
2

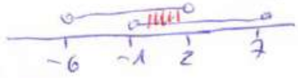
$$-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$$

$$-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} \qquad \text{וגם} \qquad \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$$

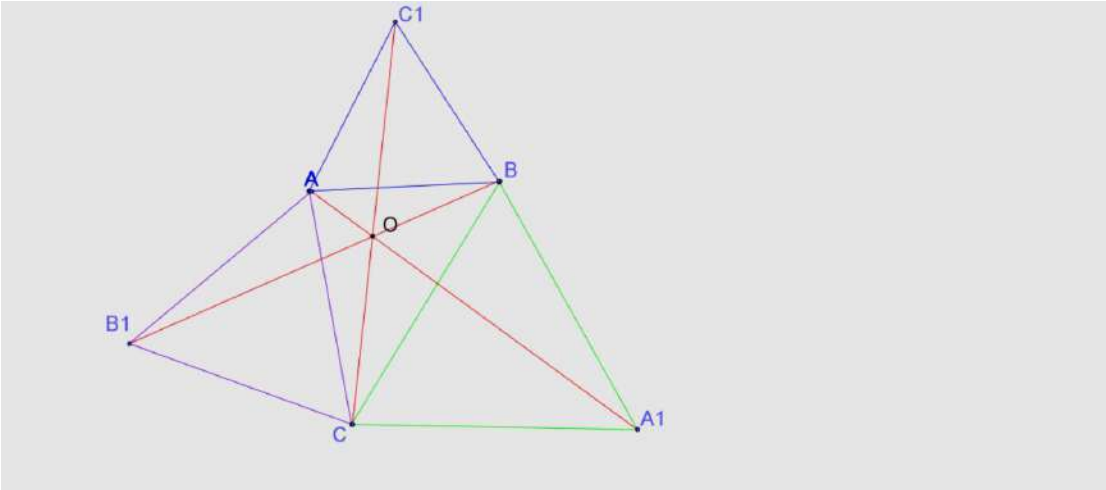
$$0 < \frac{4x^2+x(a-3)+1}{x^2-x+1} \qquad\qquad \frac{-x^2+x(a+2)-4}{x^2-x+1} < 0$$

המכנה תמיד חיובי ולכן צריך שהמונה השמאלי להיות תמיד חיובי ($\Delta<0$)
והמונה הימני תמיד שלילי ($\Delta<0$)

$$(a-3)^2-16<0 \qquad\qquad (a+2)^2-16<0$$
$$(a-3)^2<16 \qquad\qquad (a+2)^2<16$$
$$-4<a-3<4 \qquad\qquad -4<a+2<4$$
$$-1<a<7 \qquad\qquad -6<a<2$$




$$-1<a<2$$




1.59 / 3

ב.

$C_1B = AB$

$\angle C_1BC = 60° + \angle ABC = \angle ABA_1$

$CB = BA_1$

$\Downarrow$

(צ.ז.צ) $\triangle C_1BC \cong \triangle ABA_1$

$\Downarrow$

$\angle OC_1B = \angle BAO$ , $AA_1 = CC_1$

(*)

$\angle AC_1O = \alpha \Rightarrow \angle OC_1B = 60 - \alpha$ (נתון)

$\angle OC_1B = 60 - \alpha = \angle BAO$

$\angle C_1AB = 60°$

$\triangle AC_1O$ :
$180° = \angle AC_1O + \angle C_1AO + \angle AOC_1$

$180° = \alpha + (60 + 60 - \alpha) + \angle AOC_1$

$\Rightarrow \boxed{60° = \angle AOC_1}$

$\alpha = \angle ABO = \angle AC_1O \Rightarrow$ $A, C_1, B, O$ הם 4 נק' על מעגל אחד.

מרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות הוא $180°$

$\boxed{\angle AOB = 120°} \Leftarrow \angle AOB + \angle AC_1B = 180°$

ג. מסעיפים קודמים $\angle AOB + \angle AC_1B = 180°$

ד. מסעיף ג' וב' מתקבל שהקטעים שווים

נשאר להראות $180° = \angle B_1OB$

ולכן $AOCB_1$ בר חסימה במעגל (בדומה לג')

$\angle B_1OA = \angle B_1CA = 60°$ (נשענות על $AB_1$)

$\angle B_1OB = \angle B_1OA + \angle AOB = 60 + 120° = 180°$

1.59
4

$$x^{3-\log_2^2 x-\log_2 x^2}-\frac{1}{x}>0$$

$$x^{3-\log_2^2 x-\log_2 x^2}>\frac{1}{x}=x^{-1}$$

בתחום $x>1$ אז

$$3-\log_2^2 x-\log_2 x^2>-1$$

$$0>\log_2^2 x+2\log_2 x-4$$

נסמן $t=\log_2 x$

$$0>t^2+2t-4$$

$$\frac{-2-\sqrt{20}}{2} \qquad \frac{-2+\sqrt{20}}{2}$$

$$-1-\sqrt{5}<t<-1+\sqrt{5}$$

$$-1-\sqrt{5}<\log_2 x<-1+\sqrt{5}$$

$$2^{-1-\sqrt{5}}<x<2^{-1+\sqrt{5}}$$

דרשנו $x>1$ ולכן $1<x<2^{-1+\sqrt{5}}$

בתחום $0<x<1$

$$3-\log_2^2 x-\log_2 x^2<-1$$

$$0<\log_2^2 x+2\log_2 x-4$$

$$0<t^2+2t-4$$

$$-1-\sqrt{5} \qquad -1+\sqrt{5}$$

$t>-1+\sqrt{5} \rightarrow \log_2 x>-1+\sqrt{5}$

$t<-1-\sqrt{5} \rightarrow \log_2 x<-1-\sqrt{5}$

לא מתאים לתחום $\cancel{x>2^{-1+\sqrt{5}}}$

$0<x<2^{-1-\sqrt{5}}$

בגלל התחום

לסיכום:
$0<x<2^{-1-\sqrt{5}}$
$1<x<2^{-1+\sqrt{5}}$

1.59

5

(א)

נפרק לשני סדרות

במקומות האי זוגיים

$b, ab^2, a^2b^3, \dots$

סדרה הנדסית שמנתה $ab$ ובה $n$ איברים

$$S_{\text{אי זוגי}} = \frac{b((ab)^n-1)}{ab-1}$$

סדרת הזוגיים

$ab, a^2b^2, a^3b^3, \dots$

$$S_{\text{זוגי}} = \frac{ab((ab)^n-1)}{ab-1}$$

נחבר את הסכומים

$$\frac{b((ab)^n-1)}{ab-1} + \frac{ab((ab)^n-1)}{ab-1} =$$

$$\frac{(b+ab)((ab)^n-1)}{ab-1}$$

(ב) $n=1: \ 3>1$

נניח שהטענה נכונה עבור $n$ טבעי

ונראה כי היא נכונה עבור $n+1$

$$3^{n+1} \overset{?}{\geq} (n+1)^2$$

$$3^{n+1} = 3\cdot 3^n > 3n^2 = n^2 + 2n^2 > n^2+2n+1$$

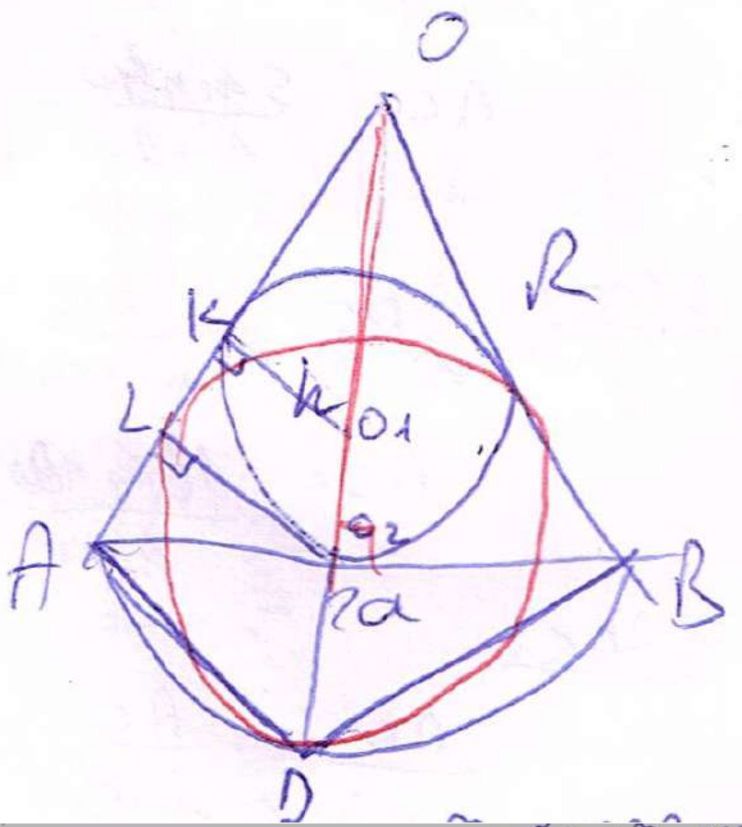
לפי ההנחה

נכונות האינדוקציה נוספת $2n^2 > 2n+1$

$n=2: \ 8>5$

נניח שהטענה נכונה ל-$n$ ונראה עבור $n+1$

$$2(n+1)^2 = 2n^2+4n+2 > 2n+1$$




1.59
6

נשווה שטח $\Delta ABC$ בשתי דרכים

$$\frac{h\cdot\cancel{2}a}{\cancel{2}} = r\,\frac{\cancel{2}R+\cancel{2}a}{\cancel{2}} \to r = \frac{ha}{R+a} = \frac{\sqrt{R^2-a^2}\,a}{R+a} = \frac{\sqrt{(R-a)(R+a)}\,a}{R+a}$$

$$\boxed{r = a\sqrt{\frac{R-a}{R+a}}}$$

$\Delta OKO_1 \sim \Delta OLO_2$ (s.s)

$$\frac{KO_1}{LO_2} = \frac{OO_1}{OO_2} \to \frac{r}{r} = \frac{h-r}{R-r} \to \boxed{r = \frac{Rr}{h} = \frac{Ra}{R+a}}$$