1.73 ⑩

1

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{2},\ \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

2230
תשפ"ג

$$1,\ \frac{n}{2},\ \frac{n(n-1)}{8}$$

מתקיים

$$n = 1+\frac{n(n-1)}{8}$$

$$n = 1+\frac{n^2-n}{8} \quad /\cdot 8$$

$$8n = 8+n^2-n$$

$$n^2-9n+8=0$$

$$n = 8,\ \cancel{1}$$

יש לפחות 3 איברים

$$T_{k+1} = \binom{8}{k} x^{\frac{1}{2}(8-k)} \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{4}}\right)^k$$

חזקת ה- x $\quad \frac{1}{2}(8-k)-\frac{1}{4}k$

$$4-\frac{3}{4}k$$

נחפש מעריך שלם ולכן k מתחלק ב 4 ללא שארית:
$0 \le k \le 8$ לכן $k=0,4,8$

$$k=0:\ T_1 = \binom{8}{0} x^4 = x^4$$

$$k=4\quad T_5 = \binom{8}{4} x \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!\cdot 2^4} x = \frac{35}{8}x$$

$$k=8\quad T_9 = \binom{8}{8} x^{-2}\frac{1}{2^8} = \frac{1}{256x^2}$$

Scanned with CamScanner

1.73

א1

$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{\frac{1}{2}(n-k)} \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{4}}\right)^k$

המקדם הראשון $= 1$ המקדם השני $= n \cdot \frac{1}{2}$ המקדם השלישי $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{4}$

עפ"י תכונת סדרה חשבונית $/ \cdot 8$ $\quad 2\left(n \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{n(n-1)}{8}$

$8n = 8 + n^2 - n \rightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \rightarrow n = 8, \cancel{1}$ ← יש לפחות 3 מקדמים

נחפש חזקה שלמה של x: $\quad \frac{1}{2}(8-k) - \frac{1}{4}k = 4 - \frac{3}{4}k$

כאשר $0 \le k \le 8$ נקבל $k = 0, 4, 8$

$T_1 = x^4 \quad , \quad T_5 = \binom{8}{4} x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{70}{16} x = \frac{35x}{8}, \quad T_9 = \left(\frac{1}{2}\right)^8 x^{-2} = \frac{1}{256x^2}$

$1.7\frac{3}{2}$

(יב) נוכיח באינדוקציה עבור

$n=1$ $\qquad a_1 = 4 - 3(-1)^1 = 7$ ✓

נניח $a_n = 4^n - 3(-1)^n$

$a_{n+1} = 4^{n+1} - 3(-1)^{n+1}$

ונראה $a_{n+2} = 4^{n+2} - 3(-1)^{n+2}$

ע"פ הנתון

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n$$

$$= 3\left[4^{n+1} - 3(-1)^{n+1}\right] + 4\left[4^n - 3(-1)^n\right] =$$

$$= 3\cdot 4^{n+1} - 9(-1)^{n+1} + 4^{n+1} - 12(-1)^n = 4\cdot 4^{n+1} - 9(-1)^{n+1} + 12(-1)^{n+1} =$$

$$= 4^{n+2} + 3(-1)^{n+1} = 4^{n+2} - 3(-1)^{n+2}$$

1.73

ק2

$$\log_m x + \log_{mx} x > 0$$

$$\log_m x + \frac{1}{\log_x mx} > 0$$

$1 \neq m > 0$

$x > 0$

$1 \neq mx > 0$

מתקיים מהדרישה הקודמת

$$\log_m x + \frac{1}{\log_x m + \log_x x} > 0 \qquad x \neq \frac{1}{m}$$

$$\log_m x + \frac{1}{\log_x m + 1} > 0$$

נסמן $\log_m x = t$

$$t + \frac{1}{\frac{1}{t} + 1} > 0$$

$$0 < t + \frac{1}{\frac{1+t}{t}} = t + \frac{t}{1+t} = \frac{t(1+t)+t}{1+t} = \frac{t^2+2t}{1+t} = \frac{t(t+2)}{1+t}$$

$t > 0$

$-2 < t < -1$

$-\quad +\quad -\quad +$

$-2 \quad -1 \quad 0$

<u>נחלק למקרים</u> עבור $m > 1$

$$x > m^0 = 1 \Leftarrow \log_m x = t > 0$$

$$\frac{1}{m^2} < x < \frac{1}{m} \Leftarrow -2 < \log_m x < -1 \Leftarrow -2 < t < -1$$

עבור $0 < m < 1$

$$0 < x < m^0 = 1 \Leftarrow \log_m x = t > 0$$

ת"ה

$$\frac{1}{m^2} > x > \frac{1}{m} \Leftarrow -2 < \log_m x < -1$$

$\frac{1.73}{3}$

$$-6 < \frac{2x^2+(4+p)x+p-2}{x^2+x+1} < 4$$

אם

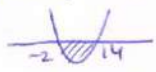
$$-6 < \frac{2x^2+(4+p)x+p-2}{x^2+x+1} \qquad\qquad \frac{2x^2+(4+p)x+p-2}{x^2+x+1} < 4$$

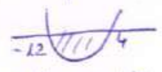
$$0 < \frac{8x^2+(10+p)x+p+4}{x^2+x+1} \qquad\qquad -\frac{2x^2+px+p-6}{x^2+x+1} < 0$$

המכנה תמיד חיובי, ולכן: המונה השמאלי תמיד חיובי $(\Delta<0)$ המונה הימני תמיד שלילי $(\Delta<0)$

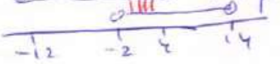
$$(10+p)^2-32(p+4)<0 \qquad\qquad p^2+8(p-6)<0$$

$$p^2-12p-28<0 \qquad\qquad p^2+8p-48<0$$





$$-2<p<14 \qquad\qquad -12<p<4$$



$-2<p<4$

1.73
4

(א) $7, 10, 16, 28, 52, \dots$

(*) $3, 6, 12, 24, \dots$

$$a_n = a_1 + S^*_{n-1}$$

$$= 7 + \frac{3(2^{n-1}-1)}{2-1} = 7 + 3\cdot 2^{n-1} - 3 = 4 + 3\cdot 2^{n-1}$$

(ב)

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 3 \\ a_3 - a_2 &= 6 \\ a_4 - a_3 &= 12 \\ a_5 - a_4 &= 24 \end{aligned}\right\}$$ סדרה הנדסית

$\vdots$

$$a_{n+1} - a_n = 3\cdot 2^{n-1}$$ איבר ה- n בסדרה ההנדסית

$$a_{n+1} = a_n + 3\cdot 2^{n-1}$$

$$a_1 = 7$$

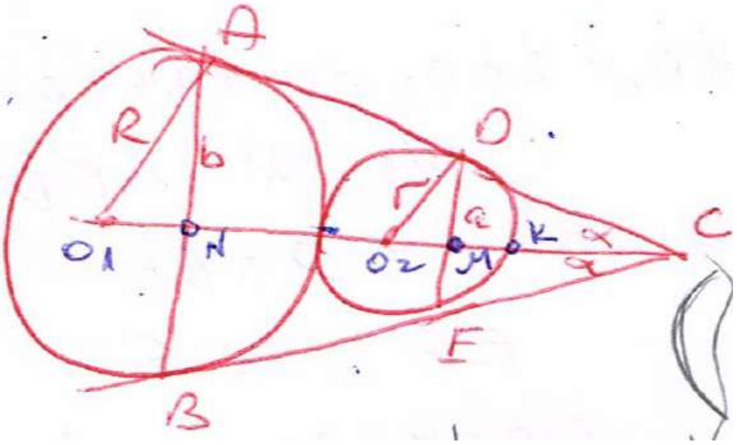
(ג)

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$= (4+3\cdot 2^0) + (4+3\cdot 2^1) + (4\cdot 3\cdot 2^2) + \dots + (4 + 3\cdot 2^{n-1}) =$$

$$= (4+4+\dots+4) + 3(2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}) =$$

$$= 4n + 3\cdot \frac{2^0(2^n-1)}{2-1} = 4n + 3\cdot 2^n - 3$$



1.73
5 حل $\triangle AO_1C \sim \triangle DO_2C$ (S.S)

$$\frac{O_1A}{O_2D} = \frac{O_1C}{O_2C}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{R+2r+KC}{r+KC}$$

$$\cancel{Rr} + R\cdot KC = \cancel{Rr} + 2r^2 + r\cdot KC$$

$$KC = \frac{2r^2}{R-r}$$

$$\sin\alpha = \frac{DO_2}{O_2C} = \frac{r}{r+\frac{2r^2}{R-r}} = \frac{(R-r)r}{Rr+r^2} =$$

$$= \frac{(R-r)\cancel{r}}{(R+r)\cancel{r}} = \frac{R-r}{R+r}$$

و

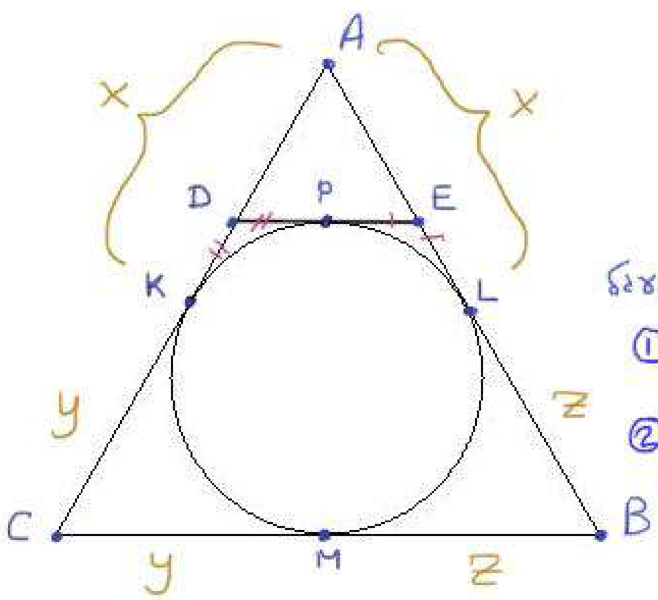
$$\alpha = \measuredangle O_2DE$$

$$\sin\alpha = \frac{O_2M}{O_2D} = \frac{R-r}{R+r} = \frac{\frac{R}{R}-\frac{r}{R}}{\frac{R}{R}+\frac{r}{R}} = \frac{1-\frac{a}{b}}{1+\frac{a}{b}} = \frac{b-a}{b+a}$$

(S.S) $\triangle O_1AN \sim \triangle O_2DM$

$$\frac{r}{R} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{a}{b}$$



נתון: ③ $DE \parallel CB$

$DE = 2cm$

היקף $ACB \Leftarrow 18$

צ"ל: CB ?

הוכחה: – $DP = DK,\ PE = EL$ (משיקים למעגל היוצאים מאותה נק' שווים) ①

– באותו אופן ② $AK = AL = x$, $CK = CM = y$, $LB = BM = z$

– $AD + DP = x$ (1)(2)

כנ"ל $AE + PE$

⑥ $AD + DP + PE + AE =$ היקף $ADE = 2x$

– היקף $ABC = AK + KC + CM + MB + BL + LA = 2(x+y+z) = 18$ ((2), נתון)

– $CB = y + z \Leftarrow$ נציב $y+z$ מהמשוואה הקודמת $\Leftarrow 2(x+y+z) = 18$

$2x + 2CB = 18 \quad /:2$

④ $\boxed{CB = 9 - x}$

– $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (קל לראות ז.ז.ז (3))

– ⑤ $\frac{DE}{CB} = \frac{\text{היקף } ADE}{\text{היקף } AB}$ (יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון)

– נציב את (4) (5) (6) $\Leftarrow$ $\begin{cases} \frac{2}{CB} = \frac{2x}{18} \\ CB = 9 - x \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{2}{CB} = \frac{2(9-CB)}{18}$

$CB(9 - CB) = 18$

$CB^2 - 9CB - 18 = 0$

$CB = 6,3$