1.78
c)

$$\left[3\left(3^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = \frac{3}{\sqrt[10]{3}}$$

$$\left(3^{1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 3^{1-\frac{1}{10}}$$

$$3^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}+\frac{2(\sqrt{x}+3)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = 3^{\frac{9}{10}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}-1}+\frac{2\sqrt{x}+6}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{4\sqrt{x}+2\sqrt{x}+6}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{6\sqrt{x}+6}{2x-2\sqrt{x}} = \frac{9}{10}$$

$$60\sqrt{x}+60 = 18x-18\sqrt{x} \quad /:6$$

$$3x-13\sqrt{x}-10=0$$

$$3t^2-13t-10=0 \qquad \sqrt{x}=t$$

$$t=5 \rightarrow \sqrt{x}=5 \rightarrow x=25$$

$$t=-\frac{2}{3} \rightarrow \sqrt{x}=-\frac{2}{3} \rightarrow \emptyset$$

1.78
זו

$$\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) \le -4$$

תחום הגדרה

$x > 0$

$x > 1 \leftarrow \log_2 x > 0$

$x > 1 \leftarrow \log_4 x > 0$

$\boxed{x > 1}$

$$\log_2\left(\tfrac{1}{2}\log_2 t\right) + \tfrac{1}{2}\log_2(\log_2 x) \le -4$$

נסמן $t = \log_2 x$

$$\log_2\left(\tfrac{1}{2}t\right) + \tfrac{1}{2}\log_2(t) \le -4$$

$$\log_2\left(\tfrac{1}{2}t\right) + \log_2\sqrt{t} \le -4$$

$$\log_2\left(\tfrac{1}{2}t\sqrt{t}\right) \le -4$$

$$\tfrac{1}{2}t^{1.5} \le 2^{-4}$$

$$t^{1.5} \le 2^{-3} \quad /\sqrt[1.5]{}$$

$$t \le 2^{-2} = \tfrac{1}{4}$$

$$\log_2 x \le \tfrac{1}{4} \longrightarrow \boxed{x \le \sqrt[4]{2}}$$

לסיכום: $\boxed{1 < x \le \sqrt[4]{2}}$

1.78
12

$$|m|x^2+(m-1)x+m^2 \neq x+4$$

$$|m|x^2+(m-2)x+m^2-4 \neq 0$$

כדי שלא יהיה פתרון נבדוק א) מקרה לינארי $m=0$ $\quad -2x-4\neq 0$
יש פתרון

ב) נדרוש $\Delta<0$

$$(m-2)^2-4|m|(m^2-4)<0$$

$$(m-2)\left[m-2-4|m|(m+2)\right]<0$$

$m=2$

$m>0$: $m-2-4m(m+2)=0$, $\quad -4m^2-7m-2=0$

$m<0$: $m-2+4m(m+2)=0$, $\quad 4m^2+9m-2=0$

$+ \qquad +$

$\frac{7\pm\sqrt{17}}{-8}$ ← בתחום $m>0$ נקבל שאין פתרון.

בתחום

$\frac{-9\pm\sqrt{113}}{8}$ ← בתחום $m<0$ נקבל $\frac{-9-\sqrt{113}}{8}$

לסיכום:

$$\boxed{\begin{matrix} m>2 \\ m<\frac{-9-\sqrt{113}}{8} \end{matrix}}$$

$- \quad \frac{-9-\sqrt{113}}{8} \quad + \quad 2 \quad -$

נח"ש

1.78
ג 2

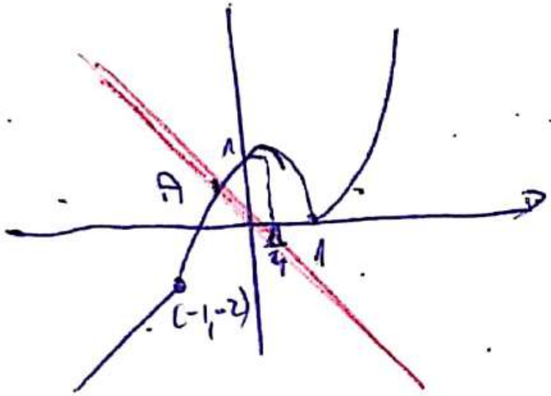
(א)

$$y=|x^2-1|+x|x-1|=|(x-1)(x+1)|+x|x-1|$$

$$y=x^2-1+x(x-1)=2x^2-x-1 \qquad x>1$$

$$y=-(x^2-1)-x(x-1)=-2x^2+x+1 \qquad -1<x\le 1$$

$$y=x^2-1-x(x-1)=x-1 \qquad x\le -1$$



(ב) נוסיף לשרטוט את $-x$ (בורוד)

מימין לנק' A מתקיים אי שוויון

נמצא את A:
$$-x=-2x^2+x+1$$
$$2x^2-2x-1=0$$
$$\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

ניתן לראות מהציור שהערך שלילי לכן

$$\boxed{x>\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$$

Scanned with CamScanner

$\underline{1.78}$ (א) נמצא כמה איבר בסדרה
$\underline{3}$

$1, 4, 10, 19, 31$

$* \ 3, 6, 9, 12$

סדרת ההפרשים חשבונית

$$a_n = a_1 + S_{n-1}^{*} = 1 + \frac{n-1}{2}\left[2\cdot 3 + 3(n-2)\right]$$

$$= 1 + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3n^2-3n+2}{2}$$

הוא והיות וסדרת ההפרשים היא חשבונית על מס' סופי של איברים, נראה שהסדרות מתלכדות בעזרת אינדוקציה

$a_1 = 1$ בשתי הסדרות

נניח a_n, a_{n-1} שווים בשתי הסדרות ונראה שגם a_{n+1} שווה בשתיהן.

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 3 = 2\left(\frac{3n^2-3n+2}{2}\right) - \left(\frac{3(n-1)^2-3(n-1)+2}{2}\right) + 3 =$$

$$= 3n^2-3n+2 - \frac{3n^2-6n+3-3n+3+2}{2} + 3 =$$

$$= \frac{6n^2-6n+2\cancel{4}-3n^2+6n-3+3n-3-2+6}{2} =$$

$$= \frac{3n^2+3n+2}{2}$$

מצד שני נחשב a_{n+1} לפי הסדרה שהגדרנו

$$a_{n+1} = \frac{3(n+1)^2-3(n+1)+2}{2} = \frac{3n^2+6n+3-3n-3+2}{2} = \frac{3n^2+3n+2}{2}$$

(ב) $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$$\frac{3\cdot 1^2-3\cdot 1+2}{2} + \frac{3\cdot 2^2-3\cdot 2+2}{2} + \frac{3\cdot 3^2-3\cdot 3+2}{2} + \dots + \frac{3\cdot n^2-3n+2}{2} =$$

$$\frac{3}{2}(1^2+2^2+\dots+n^2) - \frac{3}{2}(1+2+\dots+n) + \underbrace{\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\dots+\frac{2}{2}\right)}_{n \text{ פעמים}} =$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) - \frac{3}{2}\cdot\frac{n}{2}(1+n) + n = \frac{n}{4}(n+1)(2n+1) - \frac{3n}{4}(1+n) + n =$$

$$\frac{n(n+1)}{4}\left[2n+1-3\right] + n = \frac{n(n+1)(2n-2)}{4} + n$$

$$= \frac{n}{4}\left[(n+1)(2n-2)+4\right] = \frac{n}{4}\left[2n^2-2+4\right] = \frac{n}{4}\left[2n^2+2\right] = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

$\underline{1.78 \; 4}$

$$(x-1)\sqrt{x^2+x+2} \ge x^3-x$$

הביטוי מוגדר לכל x $(\Delta<0)$

$$(x-1)\sqrt{x^2+x+2} \ge x(x^2-1)$$

$$(x-1)\sqrt{x^2+x+2} \ge x(x-1)(x+1)$$

$$(x-1)\left[\sqrt{x^2+x+2} - x(x+1)\right] \ge 0$$

$x=1$

$$\sqrt{x^2+x+2} = x^2+x$$

נסמן $x^2+x=A$

$$\sqrt{A+2} = A \quad /()^2$$

$$A+2 = A^2$$

$$A^2-A-2=0 \longrightarrow A=2 \;,\; A=-1$$

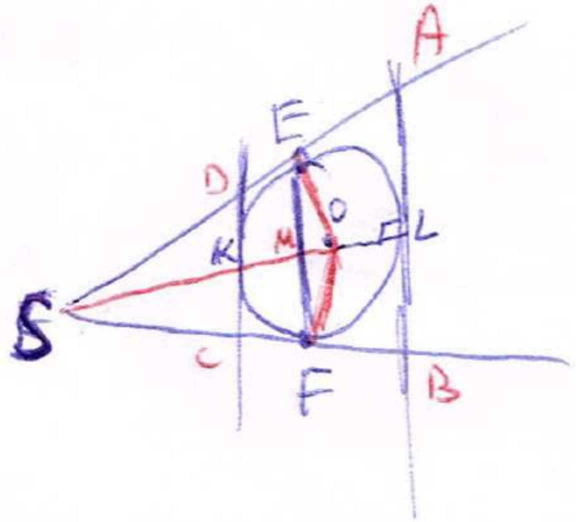
$A=2$: $x^2+x=2$, $x^2+x-2=0$, $x=-2$, $x=1$

$x^2+x=-1$, $x^2+x+1=0$, $\emptyset$

נצייר קו (נשים לב ש- $x=1$ מופיע פעמיים בפתרונות)

$+$ | -2 | $-$ | 1 | $-$

לסיכום: $\boxed{x \le -2 \text{ או } x=1}$



$\frac{1.78}{5}$

ב'

$\sphericalangle SEF = \sphericalangle SFE$ (2) משיקים היוצאים מנק' אחת)

$\Downarrow$

$\sphericalangle A = \sphericalangle SEF = \sphericalangle SFF = \sphericalangle B$

ג'

$OM = 3 \Leftarrow ME = \frac{1}{2} EF = 4$

$OE = 5$

$SO \perp EF \Leftarrow$ SEOF דלתון

$(S.S)\ \triangle SOE \sim \triangle SEM \sim \triangle EOM$

$EM^2 = MO \cdot SM \rightarrow SM = \frac{16}{3} \rightarrow OS = \frac{25}{3}$

$SF = \sqrt{SO^2 - OF^2} = \frac{20}{3}$

ד'

$(S.S)\ \triangle SOE \sim \triangle SAL$

$$\frac{SO}{SA} = \frac{EO}{AL} = \frac{SE}{SL}$$

$$\frac{5}{AL} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{25}{3}+5}$$

$$AL = 10$$

SL חוצה זווית וגובה

$AB = 20 \Leftarrow \Delta ASB$ ק

$$\frac{SK}{SL} = \frac{DK}{AL}$$

$$\frac{\frac{10}{3}}{\frac{40}{3}} = \frac{DK}{10} \rightarrow DK = 2.5$$

$$DC = 5$$

ABCD טרפז ש"ש חוסם מעגל.

$$2AD = DC + AB$$

$$AD = BC = 12.5$$

1.78
6

ט. הגובה AA' במשולש $\triangle ABC$ הוא גם תיכון ולכן AA' אנך אמצעי. מרכז המעגל החוסם נמצא על האנך האמצעי.

ב: $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAC$ (AA' גם חוצה זווית)

$$\Downarrow$$
$$BE = EC$$

$\triangle BHC$ שו"ש (HK תיכון וגובה לצלע BC)

$$\Downarrow$$
$$BH = HC$$

נסמן $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BEA = \alpha$ (נשענות על AB)

$$\sphericalangle EBA = 90 - \alpha = \sphericalangle CBH$$
$$\Downarrow$$

BHE משו"ש (BA חוצה זווית וגובה)

$$\Downarrow$$
$$BE = BH$$

$\Leftarrow$ $BHCE$ מרובע בעל 4 צלעות שוות ולכן מעוין

ג: AE עובר במרכז המעגל ולכן קוטר

$$\sphericalangle ADE = 90^\circ$$

נסמן: $\sphericalangle FDE = \beta = \sphericalangle EAD$ (זווית בין משיק למיתר)

$\sphericalangle EAD = \beta = \sphericalangle DAC$ (AD חוצה זווית)

$\sphericalangle DAC = \beta = \sphericalangle DEC$ (נשענות על DC)

$$\Downarrow$$
$$\sphericalangle DEC = \sphericalangle FDE \xrightarrow{\text{מתחלפות}} EC \parallel FL$$
$$\Downarrow$$
$$\sphericalangle AFL = \sphericalangle AEC \quad (\text{מתאימות})$$

3. $\angle BAA' = 2\beta$
$\angle ABC = 90 - 2\beta$
$\angle ABC = \angle AEC$ (נשענות על AC)

$\angle AEC = \angle AFL$ (מתאימות)
$\triangle ABA' \sim \triangle LFA'$ (S.S)
$\frac{AA'}{A'L} = \frac{A'B}{A'F}$

$A'A \cdot A'F = A'B \cdot A'L$
עפ״י משפט הנ״ל A, B, F, L
המקיימות את הקשר הנ״ל, נמצאות
על מעגל אחד.

ה. (4) הראינו בסעיף ד $BHCE$ מעוין ולכן נבנו שגים.
$BE = HE$ ונקבל
$\triangle BHE$ שווה צלעות
$\Leftarrow \angle BEA = 60° \Leftarrow \angle BAE = 30° \Leftarrow$
$\angle BAC = 60° \Leftarrow \triangle ABC$ שווה צלעות

ו. נתון ש $\angle AIL = 90°$
כש $\angle CLI = \angle LCI = 45°$
$\Leftarrow \angle BAA' = 45° = \angle CLI$ (נשענות על AF)
$\angle BAC = 2\angle BAA' = 90$
לכן ABC ישר זווית ושווה שוקיים.