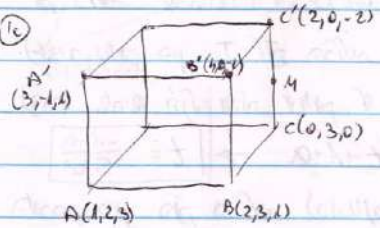
3.95

א

ב



$C' = C + \vec{AA'} = (0,3,0) + (2,-3,-2) = (2,0,-2)$

$CC' = (2,-3,-2)$

$M = (1, 1\frac{1}{2}, -1)$

$(2,-3,2)$ הנורמל של המישור הוא

π עובר דרך M

$\pi = 2x - 3y - 2z + \frac{1}{2} / \cdot 2$

$\pi = 4x - 6y - 4z + 11$

ג $\vec{BC} = (0,3,0) + t(-4,3,1)$

$B' = B + \vec{AA'} = (2,3,1) + (2,-3,-2) = (4,0,-1)$

$\sin\alpha = \frac{|(-4,3,1)\cdot(4,-6,-4)|}{\sqrt{26}\sqrt{68}} = \frac{38}{\sqrt{26 \cdot 68}} = \frac{19}{\sqrt{442}}$

ד $S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{BC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{1+25+4} = \frac{1}{2}\sqrt{30}$

$\vec{AB}, \vec{BC}$ $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x-2-5y-2z-4=0$

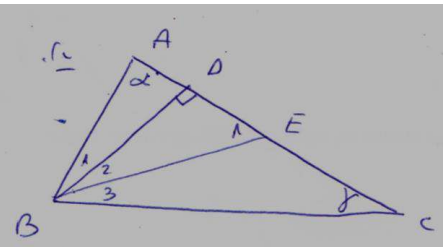
$A'B'C'$ מישור, $A'B'C'$ מישור מקביל ל C שעובר דרך

$x - 5y - 2z - 6 = 0$

$h = \frac{|1-25-6|}{\sqrt{30}} = \frac{21}{\sqrt{30}}$

$V = \frac{1}{3} S_{A'B'C'} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{30} \cdot \frac{21}{\sqrt{30}} = \frac{7}{2}$

3.95



$\angle B_1 = 90 - \alpha$

$\angle B_1 + \angle B_2 = \frac{180-\alpha-\gamma}{2} = 90 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma$

$\angle B_2 = 90 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma - (90-\alpha)$

$= \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$

$\angle B_3 = 90 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma$

$\angle E_1 = \angle B_3 + \angle C = 90 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$

$= 90 - \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BDE}} = \frac{\frac{BD \cdot AC}{2}}{\frac{BD \cdot DE}{2}} = \frac{AC}{DE}$$

(*) $S_{BED} = \frac{DE \cdot S_{ABC}}{AC}$

$\triangle ABC$: $\frac{AC}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{BC}{\sin\alpha} \rightarrow BC = \frac{AC \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$

$\frac{AC}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{AB}{\sin\gamma} \rightarrow AB = \frac{AC \cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$

$\triangle ABD$: $BD = AB \cdot \sin\alpha = \frac{AC \cdot \sin\gamma \sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$

$\triangle BDE$: $DE = BD \tan\angle B_2$

$= \frac{AC \cdot \sin\gamma \sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)} \cdot \tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)$

(*) $S_{BED} = \frac{\frac{AC \cdot \sin\gamma \sin\alpha \tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin(\alpha+\gamma)} \cdot S_{ABC}}{AC}$ $= S$

$= \frac{S \cdot \sin\gamma \sin\alpha \tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin(\alpha+\gamma)}$

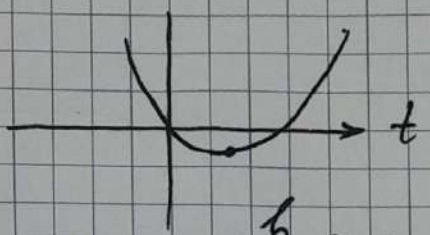
3.95

3к. $(m-1)x+(m-3)\sqrt{x}+m-2=0$

$x \geq 0$ ОДЗ

$\sqrt{x}=t$

$(m-1)t^2+(m-3)t+m-2=0$



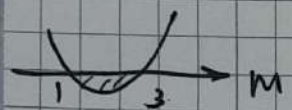
$D>0$ $\quad -\frac{b}{2a}>0$ $\quad f(t)_{t=0}\geq 0$

$t^2+\frac{m-3}{m-1}t+\frac{m-2}{m-1}=0$

$-\frac{b}{2a}>0$

$-\frac{m-3}{2(m-1)}>0$

$\frac{m-3}{m-1}<0$



$1<m<3$

$f(0)\geq 0$

$\frac{m-2}{m-1}\geq 0$

$m<1 \cup m\geq 2$

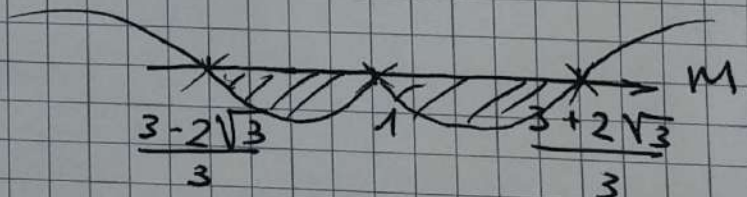
$D>0$

$\frac{(m-3)^2}{(m-1)^2}-\frac{4(m-2)}{(m-1)}>0$

$\frac{m^2-6m+9-4m^2+12m-8}{(m-1)^2}>0$

$-\frac{3m^2+6m+1}{(m+1)^2}>0$

$\frac{3m^2+6m-1}{(m+1)^2}<0$

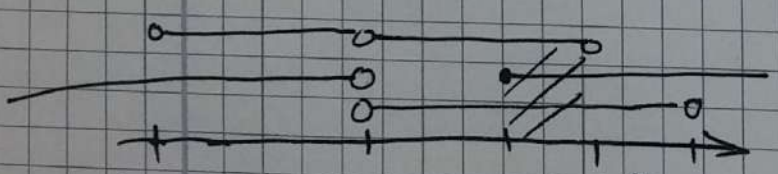


$\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{3-2\sqrt{3}}{3}<x<1$

$\cup$

$1<x<\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$



$\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

$2\leq x<\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

3.95
עמ' 4

(1) $C_6^2 \cdot 5! = 1800$

C_6^2 ← נבחרים 2 ספרות

$5!$ ← סידור

(2)

מספר מתחלק ב-3 אם סכום ספרותיו מתחלק ב-3.

$5+7+8+9=29$ לכן נוכל לבחור את 1 או את 4

$2 \cdot 5! = 240$

2 ← מס' אפשרויות לספרה הרצויה

3.95
ב

$n=1$ $\left(2-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{(4-1)(6+1)}{3\cdot 4} - 2$ ✓

נניח כי הטענה נכונה עבור n ונוכיח את נכונותה עבור $n+1$

$$\underbrace{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(2^n - \frac{1}{2^n}\right)^2}_{} + \left(2^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{\left(4^{n+1}-1\right)\left(4^{n+2}+1\right)}{3\cdot 4^{n+1}} - 2(n+1)$$

$$-2n + \frac{\left(4^n-1\right)\left(4^{n+1}+1\right)}{3\cdot 4^n} + 4^{n+1} - 2 + \frac{1}{4^{n+1}} \stackrel{?}{=} \frac{4^{2n+3}+4^{n+1}-4^{n+2}-1-6\cdot 4^{n+1}(n+1)}{3\cdot 4^{n+1}}$$

$$\frac{-6n\cdot 4^n + 4^{2n+1} - 4^{n+1} + 4^n - 1 + 3\cdot 4^{2n+1} - 6\cdot 4^n}{3\cdot 4^n} + \frac{1}{4^{n+1}} \stackrel{?}{=} \frac{4^{2n+3} - 5\cdot 4^{n+1} - 4^{n+2} - 1 - 6n\cdot 4^{n+1}}{3\cdot 4^{n+1}}$$

$$\frac{-6n\cdot 4^n + 4^{2n+2} - 4^{n+1} - 5\cdot 4^n - 1}{3\cdot 4^n} + \frac{1}{4^{n+1}} =$$

$$\frac{-6n\cdot 4^{n+1} + 4^{2n+3} - 4^{n+2} - 5\cdot 4^{n+1} - 4}{3\cdot 4^{n+1}} =$$

3.95

$$y = \frac{-\sin 2x + 2\cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2x\right)}{-2\cos\left(\frac{7}{6}\pi - 2x\right) + \sqrt{3}\cos 2x}$$

יש ל

$-\cos 2 = y(2+\pi)$

$$-2\cos\left(\frac{7}{6}\pi - 2x\right) - \sqrt{3}\cos 2x \neq 0 \qquad \cdot 1_c$$

$$-2\cos\frac{7\pi}{6}\cos 2x - 2\sin\frac{7\pi}{6}\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x \neq 0$$

$$+\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x \neq 0$$

$$\sin 2x \neq 0$$

$$2x \neq \pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{2}$$

$$-1 > \frac{-\sin 2x + 2\cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2x\right)}{\sin 2x} = -1 + \frac{2\cos\frac{7\pi}{6}\cos 2x - 2\sin\frac{7\pi}{6}\sin 2x}{\sin 2x}$$

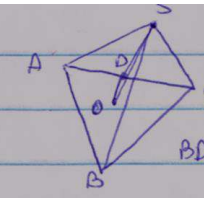
$$0 > -\sqrt{3}\cot 2x + 1$$

$$\cot 2x > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$0 < 2x < \frac{\pi}{3} \rightarrow \boxed{0 < x < \frac{\pi}{6}}$$

מקיים תנאי

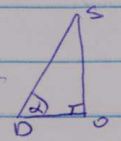
3.95



א) BD ניצב למשולש שווה צלעות ABC ולכן $AC \perp BD$, $\triangle ASC$ שווה שוקיים ולכן $SD \perp AC$

AC מאונך לשני ישרים חוצים את מישור SDB

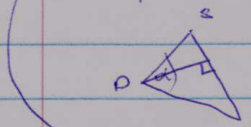
ולכן מאונך למישור SDB.



ב) $OD = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

$SO = OD \cdot \tan\alpha = \frac{a\tan\alpha}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a\tan\alpha}{6}$

ג) נוכיח שגובה $h = DS$ של $\triangle BDS$ הוא הגובה ולכן D היא הקודקוד הכולל ל SB, אבל הוא לא AC)



$S_{BDS} = \frac{DS \cdot BD \sin\alpha}{2} = \frac{h \cdot BS}{2} \rightarrow h = \frac{DS \cdot BD \sin\alpha}{BS}$

$DS = \frac{a}{2\sqrt{3}\cos\alpha}$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$BS = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \sqrt{\frac{1}{12}a^2\tan^2\alpha + \frac{1}{3}a^2}$

$\frac{h \cdot BS}{2}$

$$h = \frac{\frac{a}{2\sqrt{3}\cos\alpha} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \sin\alpha}{a\sqrt{\frac{1}{12}\tan^2\alpha + \frac{1}{3}}} = \frac{\frac{1}{2}\sin\alpha}{4\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\tan\alpha}{\sqrt{\frac{\tan^2\alpha}{12} + \frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{\frac{a}{4}\tan\alpha}{\frac{\sqrt{\tan^2\alpha + 4}}{2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}\tan\alpha}{2\sqrt{\tan^2\alpha + 4}}$$

3.95
7

(א) $y' = \dfrac{a(2\sqrt{x}-x) - \left(\frac{2}{2\sqrt{x}} - 1\right)ax}{(2\sqrt{x}-x)^2}$

$\tan 135 = \dfrac{a(2\cdot 3-9) - \left(\frac{2}{2\cdot 3} - 1\right)9a}{(2\cdot 3-9)^2}$

$-1 = \dfrac{-3a + 6a}{9} \longrightarrow -9 = 3a \longrightarrow \boxed{a=-3}$

(ב) $y = \dfrac{3x}{2\sqrt{x}-x}$

(1) $2\sqrt{x} - x \neq 0$ וגם $x \geq 0$

$2\sqrt{x} \neq x$

$4x \neq x^2$

$x \neq 0,4$

לסיכום $\boxed{0 < x \neq 4}$

(2) x=0 לא מוגדר, y=0 ומקבל ראשית x=0 ולכן אין חיתוך עם הצירים.

(3) אס' מאוזנת

$m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3x}{x(2\sqrt{x}-x)} = \dfrac{\frac{3x}{x^2}}{\frac{2\sqrt{x}}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \dfrac{0}{0-1} = 0$

$n = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3x}{2\sqrt{x}-x} = \dfrac{\frac{3x}{x}}{\frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{x}{x}} = \dfrac{3}{-1} = -3$

$\boxed{y=-3}$

אס' אנכית

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{3x}{2\sqrt{x}-x} = \dfrac{3(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} = \dfrac{0}{2} = 0$

ולכן x=0 לא אס' אנכית

$\lim_{x\to 4^-} \dfrac{3x}{2\sqrt{x}-x} = \dfrac{12}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})} = \dfrac{12}{2\cdot(+0)} = +\infty$

$\lim_{x\to 4^+} \dfrac{3x}{2\sqrt{x}-x} = \dfrac{3x}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})} = \dfrac{12}{2(-0)} = -\infty$

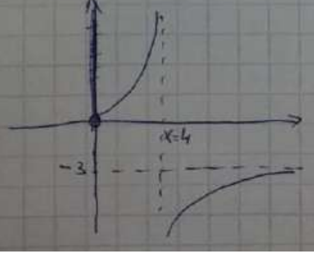
x=4 אס' אנכית

נגזרת כש- a=3

(4)+(5) $y' = \dfrac{3(2\sqrt{x}-x) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)3x}{(2\sqrt{x}-x)^2} = \dfrac{6\sqrt{x} - 3\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}-x)^2} = \dfrac{3\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}-x)^2}$

הנגזרת חיובית בכל תחום ההגדרה ולכן אין נקודות קיצון. תחום עלייה: $0<x<4$, $x>4$.

(6)



3.95 א) נציב במשוואת המעגל (0,0) ונקבל $a^2=16$ ← $a=\pm4$

8א ב) אם מרכזו על ציר ה-x המעגל הוא מהצורה $(x-a)^2+y^2=R^2$

לכן אין מקדם ל-y (המקדם שווה 0) ולכן נדרוש $a^2-5a+6=0 \to a=2,3$

ג) המקדמים של x ושל y שווים 0 (המעגל הוא מהצורה $x^2+y^2=R^2$)

$$\begin{cases} a^2-1=0 \\ a^2-5a+6=0 \end{cases} \to \begin{matrix} a=\pm1 \\ a=2,3 \end{matrix} \to$$ אין פתרון

3.95 a8

$$w = \left(\frac{\sqrt{3}i+1}{\sqrt{3}-i}\right)^{12} = \left(\frac{2\operatorname{cis}60}{2\operatorname{cis}(-30)}\right)^{12} = (\operatorname{cis}90)^{12} = (i)^{12} = 1$$

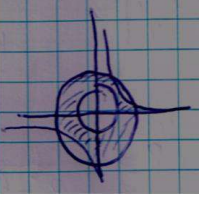
$|w| = 1 \qquad \arg w = 0$

3.95 a9

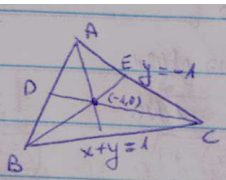
$4 \geq |z+i| \rightarrow 16 \geq x^2+(y+1)^2$

$4 > \operatorname{Im} z^2 \rightarrow 4 > 2xy \rightarrow \frac{2}{x} > y$

$|z| \geq 1 \rightarrow x^2+y^2 \geq 1$



3.95
ג'



הנקודה C היא נקודת החיתוך של AC ו BC: $C(2,-1)$

נמצא את נקודה D שהיא נקודת החיתוך של התיכונים

$$\left.\begin{aligned} -1 &= \frac{2D_x+2}{3} \rightarrow D_x = -\frac{5}{2} \\ 0 &= \frac{2D_y-1}{3} \rightarrow D_y = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} D\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$$

נמצא את שיעור ה-y של נקודת B שהיא נקודת החיתוך $E_y=-1$:

$$0 = \frac{-2+B_y}{3} \rightarrow B_y = 2$$

$(-1,2)$ שיעורי הנקודה B

משוואת AB עוברת דרך D:

$$y-2 = \frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}}(x+1) \rightarrow y-x=3$$