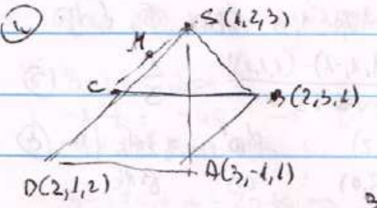
3,96
1

① 

$C = B + \vec{DA} = (1,5,2)$

$\vec{SC} = (0,3,-1)$

$\vec{SC}$ הוא הנורמל למישור העובר

ב- $M\left(1, 3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$ לכן משוואתו $3y - z - 8 = 0$

② וקטור כיוון האלכסון: $\vec{BD} = (0,2,-1)$

משוואת מישור SDC:

$$\begin{array}{c} \\ \vec{SD} \\ \vec{SC} \end{array} \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4(x-1) + (y-5) + 3(z-2) = 0$$

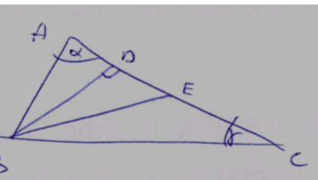
$$4x + y + 3z - 15 = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{|(4,1,3)\cdot(0,2,-1)|}{\sqrt{26}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{130}}$$

③ $S_{ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right\| = |4i + j + 2k| = \sqrt{21}$

מרחק S ממישור הבסיס: $h = \frac{|-1|}{\sqrt{21}}$ לכן הנפח $V = \frac{1}{3}\sqrt{21}\cdot\frac{1}{\sqrt{21}} = \frac{1}{3}$

3.96
2 .10



$$\frac{S_{DBE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{DE\cdot \cancel{BD}}{2}}{\frac{AC\cdot \cancel{BD}}{2}} = \frac{DE}{AC}$$

? $S = \frac{AC^2\cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{2\sin(\alpha+\gamma)}$

$$\frac{AC}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\alpha}$$

$$AB = \frac{AC\cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

$$BC = \frac{AC\cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

$$AD = AB\cos\alpha = \frac{AC\cdot \sin\gamma\cos\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

$$DE = AE - AD = \frac{1}{2}AC - \frac{AC\cdot\sin\gamma\cos\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

$$BD = AB\sin\alpha = \frac{AC\sin\gamma\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

$$S_{BDE} = \frac{BD\cdot DE}{2} =$$

$$= \frac{AC\cdot\sin\gamma\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}\cdot\left(\frac{1}{2}AC - \frac{AC\sin\gamma\cos\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}\right)$$

$$= \frac{AC^2\sin\gamma\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}\cdot\frac{\sin(\alpha+\gamma)-2\sin\gamma\cos\alpha}{2\sin(\alpha+\gamma)}$$

$$= S\cdot\frac{\sin(\alpha+\gamma)-2\sin\gamma\cos\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)} =$$

$$= S\cdot\frac{\sin\alpha\cos\gamma-\sin\gamma\cos\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)} =$$

$$= \boxed{S\cdot\frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)}}$$

$$\sin^3x(1+\cot x)+\cos^3x(1+\tan x)=2\sqrt{\sin x\cos x}$$

3.96
5

תחום הגדרה

$\sin x\cos x>0$

רבע ראשון ושלישי

$\pi\le x\le\frac{3\pi}{2}\ ,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}$

$x\ne\pi k$

$x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k$

לסיכום

$0<x<\frac{\pi}{2}$

$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$

$$\sin^3x\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}\right)+\cos^3x\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)=2\sqrt{\sin x\cos x}$$

$$(\sin^2x+\cos^2x)(\sin x+\cos x)=2\sqrt{\sin x\cos x}\quad /(\ )^2$$

$$1+2\sin x\cos x=4\sin x\cos x$$

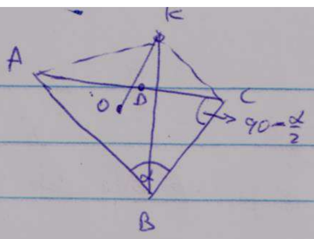
$$1=2\sin x\cos x=\sin 2x\ \longrightarrow\ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k\ \longrightarrow\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$$

נפסול פתרונות שלא בתחום ההגדרה: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}$

הפתרון $\pi+\frac{\pi}{4}$ נותן אגף שמאל שלילי ואגף ימין חיובי

לסיכום: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$

3.96
6



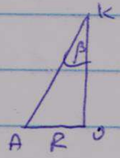
א. חפיפת משולשים

ב. $S = 2R^2 \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$

$$R = \sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{S\cdot 2\sin\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\alpha}} = \frac{\sqrt{2S\sin\alpha}}{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}$$

ג.



$$KO = R\cot\beta = \frac{\sqrt{2S\cdot\sin\alpha}\cdot\cot\beta}{2\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot S\cdot\frac{\sqrt{2S\cdot\sin\alpha}\cot\beta}{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{S\sqrt{2S\cdot\sin\alpha}\cot\beta}{6\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}$$

3.96
ע8

א) (1) נראה שהמרחק בין ~~הרדיוסים~~ המרכזים קטן מסכום הרדיוסים

$5+2>\sqrt{(6-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{45}$

(2) המשיקים המשותפים הם מהצורה $y=mx+n$, מרחקם מהמרכזים שווה לרדיוס.

$$\begin{cases} 2=\dfrac{|3-6m-n|}{\sqrt{1+m^2}} \\ 5=\dfrac{|-n|}{\sqrt{1+m^2}} \end{cases} \rightarrow \frac{|-n|}{5}=\frac{|-6m+3-n|}{2} \longrightarrow -2n=5(-6m+3-n)$$

$3n=-30m+15$

$\boxed{n=-10m+5}$ II

$2n=5(-6m+3-n)$

$\boxed{7n=-30m+15}$ I

נציב במשוואה השנייה:

$25+25m^2=n^2$

$25+25m^2=\left(\dfrac{-30m+15}{7}\right)^2$

פתרון I

$325m^2+900m+1000=0$

אין פתרון

$\cancel{25}+25m^2=100m^2-100m+\cancel{25}$

פתרון II

$m=0 \rightarrow n=5 \rightarrow y=5$

$m=\frac{4}{3} \rightarrow n=-8\frac{1}{3} \rightarrow y=\frac{4}{3}x-8\frac{1}{3}$

3.96 8ב

פולינום עם מקדמים ממשיים כל פתרון מרוכב שלו, גם הצמוד של הפתרון הוא פתרון של הפולינום לכן

$x_1 = 2i, \quad x_2 = 1-i, \quad x_3 = -2i, \quad x_4 = 1+i$

$(x-2i)(x+2i)(x-1+i)(x-1-i) = \cancel{(x^2+4)(x^2-2x) = x^4 - 6x^3 + 8}$

$(x^2+4)(x^2-2x+2) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x^2 - 8x + 8 = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8$

אם נציב $x=1$ נקבל שארית 5 ולכן נכפיל את הפולינום ב- 2 לקבל שארית 10

$2x^4 - 4x^3 + 12x^3 - 16x + 16$

3.96 9ב

זהה ל 3.58 סע׳ ו

3.96
169

נסמן את הנק' (x_0, y_0)

$$d = \frac{|3x_0 + 5y_0 - 30|}{\sqrt{34}}$$

הנק' על האליפסה ולכן מתקיים:

$$16x_0^2 + 25y_0^2 = 400$$

$$5y_0 = \pm\sqrt{400 - 16x_0^2} \rightarrow y_0 = \pm\sqrt{16 - 0.64x_0^2}$$

$$d = \frac{|3x_0 \pm 5\sqrt{16 - 0.64x_0^2} - 30|}{\sqrt{34}} = \frac{|3x_0 \pm \sqrt{400 - 16x_0^2} - 30|}{\sqrt{34}}$$

כדי למצוא מינימום נגזור את הפונ' (נפתור בנפרד עבור +, - בלי ע"מ, ונקבל אותה תוצאה)

קיצון

$$d' = \frac{1}{\sqrt{34}}\left(3 \pm \frac{32x_0}{2\sqrt{400 - 16x_0^2}}\right) = 0$$

$$6\sqrt{400 - 16x_0^2} = \pm 32x_0 \rightarrow 36(400 - 16x_0^2) = 1024x_0^2$$

$$14{,}400 = 1600x_0^2$$

$$y_0 = \pm 3.2 \leftarrow x_0 = \pm 3$$

התקבלו 4 נק' $A(3, 3.2)$ $C(-3, 3.2)$ $B(3, -3.2)$ $D(-3, -3.2)$

אם נבדוק מרחקים נקבל ש A הנק' הקרובה ביותר לישר.

$\boxed{\begin{matrix}3.58\\ \text{אב}\end{matrix}}$

i $\quad z = x+iy = r\operatorname{cis}\theta$! , מעגל היחידה $x^2+y^2=1$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r\operatorname{cis}\theta} = \frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\theta)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=1 \longrightarrow \frac{1}{z} = \operatorname{cis}(-\theta) = x-iy = \bar{z}$$

הנה הנ״ל (מובן) נמצאות על מעגל היחידה

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{x^2+y^2} = 1$$

ii בסעיף הקודם הוכח שאם הן (z) נמצאות על מעגל היחידה אז

גם $\frac{1}{z}$ נמצאות על מעגל היחידה, נשים לב שהוכח שם ש $\frac{1}{z}=\bar{z}$

לכן $\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4}\right| = |\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3+\bar{z}_4| =$

$$= |\overline{z_1+z_2+z_3+z_4}| = |\overline{1+i}| = |1-i| = \sqrt{2}$$

$\boxed{\begin{matrix}3.58\\ \text{גד}\end{matrix}}$

$$Re\left(\frac{1}{z}\right) > \frac{1}{4} \rightarrow Re\left(\frac{1}{x+iy}\right) = Re\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) > \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} > \frac{1}{4} \rightarrow 4x > x^2+y^2 \longrightarrow (x-2)^2+y^2<4$$

$$Im\left(\overline{z^2-\bar{z}}\right) \geq 2 - Im\, z$$

$$Im\left(\overline{x^2+2xyi-y^2-x+iy}\right) \geq 2-y$$

$$Im\left(x^2-y^2-x-2xyi-yi\right) \geq 2-y$$

$$-2xy\cancel{-y} \geq 2\cancel{-y} \rightarrow y \leq -\frac{1}{x}$$