חשבוניה

פתרונות וידאו מלאים באתר

תרגול 14

טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots$$

או הזזות שלהם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ כלומר מעין פולינומים אינסופיים.

למשל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (x-5)^n = 0 + 1\cdot(x-5) + 4\cdot(x-5)^2 + 9\cdot(x-5)^3 + \cdots$$

משפט

לכל טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ קיים רדיוס התכנסות R , $0 \le R < \infty$. כך שהטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה בכל קטע סגור שחלקי ל - $(-R,R)$ והטור מתבדר עבור כל $|x| > R$.

הערות

- המשפט לא מדבר לגבי התכנסות בנקודות $x = \pm R$, אותן צריך לבדוק בנפרד.
- $R = \infty$ הטור מתכנס לכל x.
- $R = 0$ הטור מתכנס רק עבור $x = 0$ (או במקרה הכללי $x = x_0$).
- יש הבדל בין רדיוס התכנסות $R =$ לתחום התכנסות שזהו אוסף ה - x – ים בהם הטור מתכנס.

מציאת תחום התכנסות

מבחן המנה (דלמבר)

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

מבחן קושי אדבר

$$R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

הערה : רדיוס ההתכנסות מוגדר כשהגבולות קיימים, גם במובן הרחב.

תזכורת

עבור טור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$. אם הטור מתכנס האיבר הכללי שלו שואף לאפס, זהו תנאי הכרחי ולא מספיק, אם האיבר הכללי לא שואף לאפס הטור מתבדר.

עבור טור $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$. אם הטורים מתכנסים אזי

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n+b_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n$$

אם $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ או $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ מתבדרים אזי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n+b_n$ מתבדר.

תרגילים

.1

מצאו רדיוס התכנסות ותחום התכנסות של הטור :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$$

פתרון

$$1\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1+\cdots+1}\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$$

מסנדוויץ' נקבל שהאיבר באמצע שווה ל – 1.

ולכן

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{1}=1$$

רדיוס ההתכנסות שווה 1.

נשאר לבדוק את ±1 בנפרד.

עבור $x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)1^n$ האיבר הכללי לא שואף לאפס ולכן הטור מתבדר.

עבור $x=-1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(-1)^n$ גם אכן האיבר הכללי לא שואף לאפס ולכן הטור מתבדר.

לסיכום תחום ההתכנסות: $(-1,1)$.

2. מצאו רדיוס התכנסות ותחום התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

פתרון

$a_n=\frac{1}{n}$ לפי דלמבר

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$$

נבדוק את הקצוות.

עבור $x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתקבל הטור ההרמוני ולכן הטור מתבדר.

עבור $x=-1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ הטור מתכנס לייבניץ.

לסיכום תחום ההתכנסות : $[-1,1)$.

3. מצאו רדיוס התכנסות ותחום התכנסות של הטור :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

פתרון

$a_n=\frac{1}{n^2}$

$$R=\frac{1}{\lim\sup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{1}=1$$

נבדוק את הקצוות.

עבור $x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס.

עבור $x=-1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ הטור מתכנס לייבניץ.

לסיכום תחום ההתכנסות : $[-1,1]$.

4. מצאו רדיוס התכנסות ותחום התכנסות של הטור :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\right)x^n$$

פתרון

$a_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$

$$1 \leq \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+1+\cdots+1} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

לכן רדיוס ההתכנסות שווה 1.

נשאר לבדוק את ± 1 בנפרד.

עבור $x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)1^n$ האיבר הכללי לא שואף לאפס ולכן הטור מתבדר.

עבור $x = -1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(-1)^n$ גם אכן האיבר הכללי לא שואף לאפס ולכן הטור מתבדר.

לסיכום תחום ההתכנסות : $(-1,1)$.

5. מצאו רדיוס התכנסות ותחום התכנסות של הטור :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$$

פתרון

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n} \cdot \frac{n+1}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3^n\left[1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right]}{3^{n+1}\left[1+\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right]} = \frac{1}{3}$$

רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{3}$. אבל לא סביב ה – 0 אלא סביב $x_0 = -1$.

עבור $x = -1-\frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{מתבדר}} + \underbrace{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)^n}_{\text{מתכנס לייבניץ}}$$

ולכן הטור מתבדר.

עבור $x=-1+\frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\text{מתכנס לייבניץ}}+\underbrace{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{מתכנס מבחן השורש}}$$

לכן הטור מתכנס.

לסיכום תחום ההתכנסות : $\left[-\frac{4}{5},-\frac{2}{3}\right)$.

6. מצאו רדיוס התכנסות ותחום התכנסות של הטור :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^{3n}$$

פתרון

נגדיר $t=x^3$ ונסתכל על הטור : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}t^n$

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{e}$$

הטור מתכנס עבור $-\frac{1}{e}<t<\frac{1}{e}$ ז"א $-\frac{1}{e}<x^3<\frac{1}{e}$ ולכן $\sqrt[3]{-\frac{1}{e}}<x<\sqrt[3]{-\frac{1}{e}}$.

7.

מצאו את תחום ההתכנסות של הטור :

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$$

פתרון

$a_n = n!$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)} = 0$$

לכן $R = 0$ והטור מתכנס רק כאשר $x = 0$.

.8

מצאו את תחום ההתכנסות של הטור: $\sum_{n=0}^{\infty} sin\left(\frac{1}{n+1}\right) x^n$

פתרון

$a_n = sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{sin\left(\frac{1}{n+2}\right)} = \cdots = 1$$

לכן $R = 1$. נבדוק בקצוות:

עבור $x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$ הטור מתבדר לפי מבחן ההשוואה הגבולי הם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$.

עבור $x = -1$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$ הטור מתכנס לייבניץ הסדרה $\left\{sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}$ מונוטונית יורדת לאפס.

לסיכום תחום ההתכנסות: $[-1,1)$.

.9

מצאו תחום התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-1)^n3^n}{3^n+(-1)^n2^n}x^n$$

פתרון

$a_n \geq 0$

נשתמש במבחן קושי אדמר (השורש)

$$\left(\frac{4^n-3^n}{3^n+2^n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq a_n{}^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{4^n+(-1)^n3^n}{3^n+(-1)^n2^n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{4^n+3^n}{3^n-2^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

נחשב גבול באינסוף, הגבול הימני :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n+3^n}{3^n-2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{3}$$

בצורה דומה, נקבל את אותו הערך בגבול השמאלי. ולכן ע״פ משפט הסנדוויץ׳

$$R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

נבדוק בקצוות : נסתכל על האיבר הכללי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+(-1)^n3^n}{3^n+(-1)^n2^n}\left(\pm\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}\right)\cdot\left(\pm\frac{3}{4}\right)^n = \pm1 \neq 0$$

לכן הטור לא מתכנס בקצוות.

לסיכום תחום ההתכנסות : $\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$.

.10

מצאו רדיוס התכנסות של הטור :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{(2x+1)^n}{n}$$

פתרון

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{2^n\left(x+\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

נגדיר $t=x+\frac{1}{2}$ ונסתכל על הטור :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{2^n t^n}{n}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{2^n}{n}}=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n\cdot\frac{2}{\sqrt[n]{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\begin{cases}2e & n=2k\\ \frac{2}{e} & n=2k+1\end{cases}$$

הגבול העליון הוא $2e$ ולכן

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{2e}$$

.11

מצאו תחום התכנסות של הטור :

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln^2 n}{n}x^{3n+1}$$

פתרון

"נסדר" את הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln^2n}{n}x^{3n+1}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln^2n}{n}x^{3n}\underset{t=x^3}{=}x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln^2n}{n}t^n$$

נחפש רדיוס התכנסות של הטור, נשים לב שמתקיים

$$1\le lnn\le n$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\le a_n^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{ln^2n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\le\left(\frac{n^2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

הגבולות בצדדים שואפים לאחד ולכן ממשפט הסנדוויץ'

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}sup\sqrt[n]{|a_n|}}=1$$

נבדוק בקצוות:

עבור $x=1$: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln^2n}{n}$ הטור מתבדר לפי מבחן ההשוואה הגבולי הם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$.

עבור $x=-1$: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{ln^2n}{n}$ הטור מתכנס לייבניץ הסדרה $\left\{\frac{ln^2n}{n}\right\}$ מונוטונית יורדת לאפס.

לכן תחום ההתכנסות של הטור הוא $-1\le x<1$.

.12

נתונה הפונקציה

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}$$

א. מצאו את R

ב. מצאו צורה מפורשת של $g(x)$.

ג. חשבו $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}$

פתרון

א.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

ב.

נסדר את הטור

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}}_{f(x)}$$

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt = x^n = x + x^2 + \cdots = \frac{x}{1-x}$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

נחזור להתחלה

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}}_{f(x)} = x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

ג.

טור המספרים שהתבקשנו לחשב נמצא בתחום ההתכנסות של טור הפונקציות שלנו

$$-1 \le x = \frac{1}{2} < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} = 1$$

טורים ידועים

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad R = \infty$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!} \quad R = \infty$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}(-1)^k}{(2k)!} \quad R = \infty$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}(-1)^k}{k} \quad R = \infty$$

תרגילים

1. פתחו לטור חזקות את $f(x) = \frac{x}{5-x^2}$, מהו תחום ההתכנסות?

פתרון

נפתח את $\frac{1}{5-x^2}$ לטור חזקות (וכדי למצוא את הטור המתאים ל - $f(x)$ נכפיל את התוצאה ב x –).

נשתמש בטור הידוע (סדרה הנדסית) :

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{n} (t^2)^k = \sum_{k=0}^{n} t^{2k}$$

כאשר $|t^2| < 1$ ז״א $|t| < 1$.

במקרה שלנו

$$\frac{1}{5-x^2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^{2k}=\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{5^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{5^{k+1}}$$

רדיוס ההתכנסות :

$$\left|\frac{x}{\sqrt{5}}\right|<1 \quad\rightarrow\quad -\sqrt{5}<x<\sqrt{5} \quad\rightarrow\quad R=\sqrt{5}$$

$$f(x)=\frac{x}{5-x^2}=x\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{5^{k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{5^{k+1}}$$

משפט

אם אפשר להציג פונקציה כטור חזקות בסביבה של x_0 כך ש - $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

אזי $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים ולכל $n\geq 0$ מתקיים $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ בפרט מקבלים שאם

לפונקציה יש הצגה כטור חזקות אזי ההצגה יחידה.

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה שגזירה מכל סדר ב - $[-R,R]$ אם קיים M כך שלכל n ולכל $x\in[-R,R]$

מתקיים $\left|f^{(n)}(x)\right|\leq M^n$ אזי ניתן לפתח את $f(x)$ לטור חזקות $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

רדיוס ההתכנסות של הטור מקיים $\breve{R}\geq R$ והטור מתכנס במידה שווה לפונקציה $f(x)$ בקטע

$[-R,R]$.

בטורי חזקות אפשר לבצע בתחומי ההתכנסות פעולות דומות לאלה המותרות בסכומים סופיים,

כלומר, בפולינומים.

תרגיל

פתחו לטור חזקות את $a>0$, $f(x)=\frac{x}{a^2-x^2}$ מהו תחום ההתכנסות של הטור?

פתרון

נשתמש בטור הידוע (סדרה הנדסית) :

$$\frac{1}{1-t^2}=\sum_{k=0}^{n}(t^2)^k=\sum_{k=0}^{n}t^{2k}$$

כאשר $|t^2|<1$ ז״א $|t|<1$.

במקרה שלנו

$$\frac{x}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{x}{a}}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\underset{t=\frac{x}{a}}{=}\frac{1}{a}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{a}\right)^{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{a^{2k+2}}$$

רדיוס ההתכנסות:

$$\left|\frac{x}{a}\right|<1\quad\rightarrow\ -a<x<a\quad\rightarrow\ R=a$$

גזירה ואינטגרציה איבר איבר

אם $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ בעלת רדיוס התכנסות R אז בתוך הקטע $(-R,R)$ מתקיימים שני דברים:

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x t^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$f'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

לשני הטורים החדשים יש אותו רדיוס התכנסות.

תרגילים

1. חשבו את הסכום $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{7^n}$

פתרון

נשים לב שזהו טור חזקות כאשר $x=\frac{1}{7}$ והטור הוא $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ לכן נחפש פונקציה שמתאימה לטור זה. ראינו:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x|<1$$

גזירה איבר, איבר:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$$

נכפול ב $-x$:

$$\frac{x}{(1-x)^2}=x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

נציב בשני האגפים $x=\frac{1}{7}$ ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{7^n}=\frac{\frac{1}{7}}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{7}{36}$$

2. פתחו לטור חזקות את $ln(1+x)$ מהו רדיוס ההתכנסות?

פתרון

$ln(1+x)$ היא הפונקציה הקדומה של $\frac{1}{1+x}$ ולכן הטור יתקבל ע״י אינטגרציה איבר איבר של הטור

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^n x^n$$

$$ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

רדיוס ההתכנסות נשאר $R = 1$

(הטור מתכנס לייבניץ ב $x = 1$ ומתבדר כטור הרמוני ב - $x = -1$).

3. פתחו לטור חזקות את $f(x) = \int_0^x \frac{sint}{t} dt$

פתרון

נפתח את $\frac{sint}{t}$ ואח"כ נבצע אינטגרציה איבר ,איבר:

$$\frac{sint}{t} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

לכן לכל x:

$$\int_0^x \frac{sint}{t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n} dt =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)! \cdot (2n+1)}$$

4. רשמו בצורה מפורשת (ולא כטור אינסופי) את $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n+1}$

פתרון

נמצא רדיוס התכנסות

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

הטור אינו מתכנס ב - $x = \pm 1$ ולכן $f(x)$ מוגדרת בקטע $(-1,1)$.

נתחיל מטור חזקות ידוע ובעזרת פעולות נגיע ל - $f(x)$. מתחיל מהטור של $\frac{1}{1-x}$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

גזירה איבר, איבר:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

נכפול ב $- x$:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

נגזור שוב:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + x \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1-x^2}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

נכפול ב - x^2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n+1} = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3} = f(x), \quad |x| < 1$$

5. מצאו את הסכום

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 2^4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \cdots$$

פתרון

זהו טור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)\cdot 2^{n+2}}$$

נסתכל על טור החזקות

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} x^{n+2}$$

נרשום את $f(x)$ בצורה מפורשת ולא כטור חזקות. נציב $x = \frac{1}{2}$ (צריך להראות ש- $x = \frac{1}{2}$ נמצא בתחום ההתכנסות).

לפי מבחן דלמבר, רדיוס ההתכנסות :

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)} = 1$$

ולכן הטור מתכנס ב - $x = \frac{1}{2}$.

ראינו בתרגיל 2 ש -

$$ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

נעשה אינטגרציה איבר איבר :

$$\int_0^x ln(1+t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^x t^{n+1} dt =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} x^{n+2}$$

מצד שני נעשה אינטגרציה בחלקים לאגף שמאל :

$$\int_0^x ln(1+t)dt \underset{\substack{u=\ln(1+t),\ u'=\frac{1}{1+t} \\ v'=1, v=t+1}}{=} [(t+1)\,ln(t+1)]_0^x - \int_0^x \frac{t+1}{t+1} dt =$$

$$(x+1)\,ln(x+1)-x$$

לסיכום, עבור $|x|<1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}=(x+1)\,ln(x+1)-x$$

ולכן עבור $x=\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}=\frac{3}{2}ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}$$

שאלות ממבחנים

.1

נתון הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}\cdot(2\mathrm{n}+1)}$$

א. הראו שהטור מתכנס.

ב. מצאו את סכומו.

ג. מצאו את סכום הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}\cdot(2\mathrm{n}+1)}$$

פתרון

.2

לאילו ערכי הפרמטרים p, q (חיוביים, שליליים או אפס) הטורים הבאים מתכנסים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n \cdot n!}{n^n}$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q|^{\ln n} \cdot n!}{n^n}$

פתרון

.3

לאילו ערכי הפרמטרים p, q, r (חיוביים, שליליים או אפס) הטורים הבאים מתכנסים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n+2^n}$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+|q|^n}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!+2^n}$

פתרון

.4

מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5^n x^{2n}}{\sqrt{n^2+3}}$$

פתרון

.5

יהי

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n \cdot (2n+1)}$$

א. מצאו את התחום של ערכי x שבו הפונקציה $f(x)$ מוגדרת היטב, והוכיחו כי היא גזירה בנקודה $x = \frac{1}{2}$.

ב. חשבו את $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

פתרון

.6

מצאו את כל ערכי x עבורם מתכנס הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cdot n!}{n^n}$

פתרון

.7

נתונה סדרת הפונקציות

$$f_n=\frac{x^3n^2}{1+n^2x}$$

המוגדרות לכל $x>0$.

א. מצאו את הפונקציה הגבולית $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ והראו כי היא מתכנסת נקודתית בקטע $[0,1]$.

ב. האם סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$.

ג. האם סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה בקרן $[0,\infty)$.

ד. האם טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x}$ מתכנס במידה שווה בקטע $[0,1]$?

פתרון

.8

א. מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1+n^2}$

בסעיפים הבאים R הוא רדיוס ההתכנסות שנמצא בסעיף א'

ב. הראו כי בקטע $[0,R)$ הפונקציה $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1+n^2}$ מקיימת $F'(x)>0$.

ג. הראו כי בקטע $(-R,0)$ הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{1+n^2}\right)'$ הוא טור לייבניץ'.

ד. הראו כי בקטע $(-R,0)$ הפונקציה $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1+n^2}$ מקיימת $F(x)>0$.

פתרון

.9

א. מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\cdot(n+3)}{n!}$

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n!}$ (ניתן להשתמש בטור מקלורן של הפונקציה e^x).

פתרון