פתרונות וידאו מלאים באתר

תרגול 1

נושאי התרגול

- קבוצות של מספרים
- סימונים
- ערך מוחלט
- קטעים
- אי שוויונות
- פונקציית הערך השלם
- אינדוקציה
- הבינום של ניוטון
- מספרים אי רציונליים
- קבוצות חסומות

קבוצות של מספרים

נסמן קבוצה ע"י סוגרים מסולסלות שבתוכן נרשום את אברי הקבוצה.

דוגמאות:

$$\{1,2,3\}, \{x: 1 < x < 2\}, \{x| \text{חיובי וזוגי } x\}$$

קבוצות מיוחדות של מספרים

$\mathbb{N}$ - המספרים הטבעיים (שלמים חיוביים)

$\mathbb{Z}$ - המספרים השלמים

$\mathbb{Q}$ - המספרים הרציונליים (מנה של מספרים שלמים עם מכנה שונה מאפס)

$\mathbb{R}$ - המספרים הממשיים

$\mathbb{C}$ - המספרים המרוכבים (א נדבר עליהם בקורס)

סימונים

שייכות $a \in A$

קבוצה ריקה $\emptyset$

חיתוך $B \cap A$ איחוד $B \cup A$

קיים $\exists$ לכל $\forall$

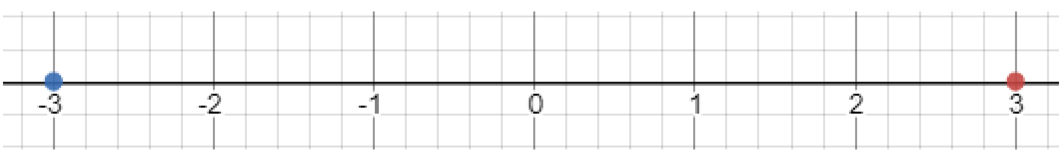
ערך מוחלט

הע״מ של x מסומן ב $|x|$ ומוגדר $max\{x,-x\} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

משמעות גאומטרית של ע״מ : מרחקו של המספר מהאפס.

דוגמה 1 :

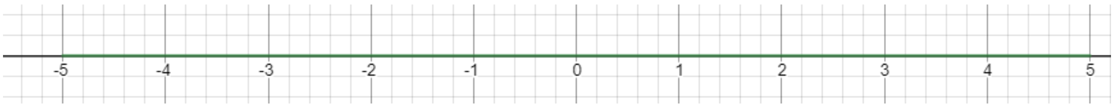
$$|x| = 3$$



ולכן הפתרון הוא $x = \pm 3$

דוגמה 2 :

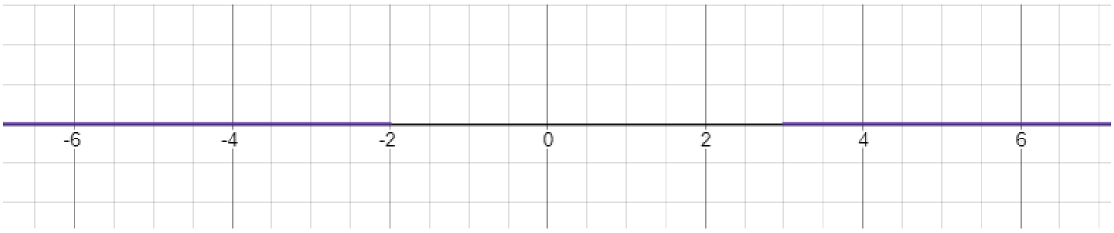
$$|x| \leq 5$$



ולכן הפתרון הוא: $-5 < x < 5$

דוגמה 3:

$$|x| \geq 2$$



ולכן הפתרון הוא: $-2 > x,\ 2 < x$

תרגיל

$$|x + 6| < 3$$

פתרון

זהו תרגיל בסגנון של דוגמה 2 (ע״מ קטן ממספר) ולכן נדרוש שיתקיים

$$-3 < x + 6 < 3$$

ניתן לפתור כשני אי שוויונות או להוסיף 6 לכל אחד משלושת הביטויים. בסופו של דבר נקבל:

$$-9 < x < -3$$

תכונות ע"מ

1. $|x| = |-x|$
2. $|x| \geq x$
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $y \neq 0$
5. אי שוויון המשולש

(*) $|x+y| \leq |x| + |y|$

(**) $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$

הוכחת (*) :

מקרה א $x + y > 0$ לפי הגדרת הע"מ

$$|x+y| = x + y \leq |x| + |y|$$

מקרה ב $x + y < 0$ לפי הגדרת הע"מ

$$|x+y| = -(x+y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$$

הוכחת (**) :

צ"ל

$$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$$

הוכחת האי שוויון הימני:

$$|x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y| \quad \rightarrow \quad |x| - |y| \leq |x-y|$$

הוכחת האי שוויון השמאלי:

$$|y| = |y - x + x| \leq |y-x| + |x| \quad \rightarrow \quad -|x-y| \leq |x| - |y|$$

עוד תכונות

1. $0 \leq |x|$ שוויון מתקיים אמ"מ $x = 0$
2. $|x| \leq c \quad \leftrightarrow \quad -c \leq x \leq c$

הוכחה

$$|x| \leq c$$

לפי הגדרת הע"מ

$$max\{x, -x\} \leq c$$

$$x \leq c \ and - x \leq c$$

$$x \leq c \ and - c \leq x$$

$$-c \leq x \leq c$$

קטעים

קטע פתוח $(-2,3)$ צורת רישום נוספת $x \in (-2,3)$ עוד צורת רישום נוספת $-2 < x < 3$

קטע סגור $[-2,3]$ צורת רישום נוספת $x \in [-2,3]$ עוד צורת רישום נוספת $-2 \leq x \leq 3$

קטע חצי סגור חצי פתוח $(-2,3], [-2,3)$.

תרגיל 1

$$\left|\frac{x-4}{x+5} - 2\right| > 1$$

פתרון

תרגיל 2

הוכיחו כי אם $|x-4|<1$ אז $\left|\frac{x^2-6x+8}{x+4}\right|<\frac{3}{7}$

פתרון

תרגיל 3

$$|x|+|x-1|<5$$

פתרון

פונקציית הערך השלם

הערך השלם של x הוא המספר השלם הגדול ביותר שאינו גדול מ x ונסמנו ב $[x]$.

דוגמה

$$[-3.2] = -4, \qquad [0] = 0, \quad \left[\frac{1}{2}\right] = 0$$

תכונות

1. $[x] \leq x \leq [x] + 1$
2. $x - 1 \leq [x] \leq x$

אינדוקציה

אינדוקציה היא שיטת הוכחה לבעיות המכילות טענות במספרים טבעיים.

באינדוקציה 3 שלבים : בסיס, הנחה וצעד.

תרגיל

הוכיחו את אי שוויון ברנולי באינדוקציה

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \qquad x \geq -1$$

פתרון

בסיס – נראה שהטענה נכונה עבור המספר הטבעי הקטן ביותר $n = 1$

$$(1 + x)^2 \geq 1 + x$$

הנחה – לכל מס' טבעי קטן או שווה ל n מתקיים

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \qquad x \geq -1$$

צעד – נראה שהטענה נכונה עבור $n+1$

צ"ל $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x,\ \ x \geq -1$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq [1+nx](1+x) = 1+x(n+1)+\underbrace{nx^2}_{\text{אי שלילי}}$$

$$\geq\ \ 1+x(n+1)$$

מסקנה

עבור $x=\frac{1}{n}$ נקבל

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n} = 2$$

תרגיל

הוכיחו שלכל $n \geq 6$ מתקיים $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$.

פתרון

נוכיח באינדוקציה

בסיס עבור $n=6$ נקבל

$$6! = 720 < 739 = (3)^6$$

צעד: נניח שעבור n טבעי כלשהו מתקיים $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$. ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$

ז"א

$$(n+1)! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

אם נסדר קצת את הביטוי נקבל שצריך להוכיח

$$(n+1)! < \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \leftrightarrow 1 < \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,2^{n+1}}$$

הוכחה

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,2^{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)^n}{n!\,2^n} = \left(\frac{n^n}{n!\,2^n}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n} > \frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$> 1$$

לפי הנחת האינדוקציה – הסוגריים גדולות מאחד

מהמסקנה מהתרגיל הקודם.

אי שוויון הממוצעים

יהיו $x_1, x_2, \cdots, x_n$ מספרים חיוביים, אז :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$$

שוויון מתקבל כאשר כל המספרים שווים.

הוכחה

נעשה בשני שלבים

נראה שההוכחה של האגף השמאלי נובעת מההוכחה של האגף הימני.

נרשום את האגף המיני עבור המספרים החיוביים הבאים : $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\cdots,\frac{1}{x_n}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_n}} \le \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}} \le \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} \quad / \cdot \frac{n\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

הוכחת האי שוויון עבור שני מספרים

עבור $x, y > 0$ נגדיר $\frac{x+y}{2}$ להיות הממוצע החשבוני של שני המספרים. $\sqrt{xy}$ להיות הממוצע ההנדסי (הגאומטרי) שלהם. ו $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ להיות הממוצע ההרמוני.

צ"ל

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \le \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$

הוכחה

נוכיח את האי שויון הימני

$$0 \le x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \quad /+4xy$$

$$4xy \le x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

הכול חיובי ולכן נוכל להוציא שורש

$$2\sqrt{xy} \le x + y$$

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$

הוכחת המקרה הכללי

א. יהיו $a \le 1 \le b$ הוכיחו $a + b \ge ab + 1$ ומצאו מתי מתקיים שוויון.

ב. הוכיחו שלכל $x_1, x_2, \cdots, x_n$ חיוביים המקיימים $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = 1$ מתקיים

$$x_1 + x_2 + \cdots x_n \geq n$$

ושוויון מתקיים כאשר $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$

ג. הוכיחו את אי שוויון הממוצעים חשבוני – הנדסי , ז״א

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}$$

פתרון

א.

נתון $b \leq 1 \leq a$ ולכן

$$(1 - a)(b - 1) \geq 0$$

שוויון מתקיים כאשר $a = 1$ או $b = 1$. מכאן לאחר פתיחת סוגריים

$$0 \leq b - ab - a + a \quad \leftrightarrow \quad ab + a \leq a + b$$

ב. הוכחה באינדוקציה

א. בסיס: עבור $n = 1$ נקבל את הטענה הוכיחו שאם x_1 חיובי ומקיים $x_1 = 1$ אזי $x_1 \geq 1$

ושוויון מתקיים כאשר $x_1 = 1$.

צעד: נניח שהטענה נכונה עבור n מספרים ונראה שהיא נכונה עבור $n + 1$

נתונים $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ חיוביים המקיימים $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$

לא יתכן שכולם גדולים מאחד או קטנים מאחד כי מכפלתם שווה 1, לכן בלי הגבלת הכלליות נניח

$$x_n \leq 1 \leq x_{n+1}$$

מהסעיף הקודם נובע

$$x_{n+1} + x_n \geq x_n \cdot x_{n+1} + 1$$

ושוויון קורה אמ"מ $x_{n+1} = 1$ או $x_n = 1$.

נסמן $y = x_n \cdot x_{n+1}$

עבור n המספרים החיוביים $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, y$ המקיימים

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{n-1} \cdot y = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$$

מתקיים ע"פ הנחת האינדוקציה

$$x_1 + x_2 + \cdots x_{n-1} + y \geq n$$

ושוויון מתקבל כאשר $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = y = 1$

$$x_1 + x_2 + \cdots x_{n-1} + x_n \cdot x_{n+1} \geq n$$

$$x_1 + x_2 + \cdots x_{n-1} \geq n - x_n \cdot x_{n+1}$$

ושוויון מתקבל כאשר $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n = x_{n+1} = 1$

נחבר את שני האי שוויוניים ונקבל

$$x_1 + x_2 + \cdots x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \geq n + 1$$

ג.

נסדר את הביטוי שצריך להוכיח בצורה שונה

$$n \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = \underbrace{\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}}_{a_1} + \underbrace{\frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}}_{a_2} + \cdots + \underbrace{\frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}}_{a_n}$$

יהיו $a_1, a_2, \cdots, a_n$ מספרים חיוביים המקיימים

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}{\left(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}\right)^n} = 1$$

מסעיף ב נקבל שהאי שוויון נכון

שוויון מתקבל כאשר $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n = 1$ ז"א $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

הבינום של ניוטון

הבינום הוא נוסחה לביטוי $(a+b)^n$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

כאשר

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

המקדמים הבינומיאליים בתחילת וסוף הפיתוח מקיימים ($0! = 1$):

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

תרגיל

חשבו את $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

פתרון

תרגיל

הוכיחו את אי שויון ברנולי עבור $x \geq 0$ בעזרת הבינום של ניוטון.

פתרון

תרגיל

א. הוכיחו שלכל $1 \le k \le n$ מתקיים $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$

ב. הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$

פתרון

א.

יהיו $1 \le k \le n$ טבעיים

אגף ימין הוכחה באינדוקציה

כאשר יהיו $k = 1$ נקבל $\frac{1}{1!} \le \frac{1}{2^{1-1}}$

נניח $\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$ ונראה $\frac{1}{(k+1)!} \le \frac{1}{2^k}$

$$\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)} \cdot \frac{1}{k!} \le \frac{1}{(k+1)} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}$$

אגף שמאל

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!} \leftrightarrow$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)\}}{k!}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!} \leftrightarrow$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \le 1 \leftrightarrow$$

$$\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \le 1$$

ב.

מנוסחת הבינום

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=$$

מסעיף א׳

$$1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}<1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+2=3$$

סכום סדה הנדסית סופית שמנתה חצי

או ע״פ סכום סדרה הנדסית

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

במקרה שלנו $a_1=1, q=\frac{1}{2}$

לכן

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<3$$

מספרים אי רציונליים

תרגיל

א. הוכיחו כי אם n מספר טבעי, אם n^2 מתחלק ב – 3 אז גם n מתחלק ב -3.

ב. הוכיח כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי רציונלי.

ג. הוכיח כי $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר אי רציונלי.

פתרון

א.

נניח בשלילה ש - n^2 מתחלק ב- 3 אבל n אינו מתחלק ב- 3.

ז״א שקיים מספר טבעי m כך ש $n=3m+1$ או $n=3m+2$

אבל אז

$$n^2=(3m+1)^2=9m^2+6m+1=3(3m^2+2m)+1$$

ולכן לא מתחלק ב -3.

צורה דומה

$$n^2=(3m+2)^2=9m^2+12m+4=3(3m^2+4m+1)+1$$

בסתירה לנתון.

ב.

נניח בשלילה ש - $\sqrt{3}$ הוא מספר רציונלי, ונציג אותו כשבר מצומצם, $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$

נעלה בריבוע

$$3=\frac{p^2}{q^2}\quad\rightarrow\quad 3q^2=p^2$$

ז״א p^2 מתחלק ב – 3 ולכן מסעיף א' גם p מתחלק ב – 3, לכן קיים k כך ש - $p=3k$

נציב חזרה

$$3q^2 = p^2 = (3k)^2 = 9k^2$$

$$q^2 = 3k^2$$

לכן q^2 מתחלק ב- 3 ולכן מסעיף א' גם q מתחלק ב – 3, לכן קיים m כך ש - $q = 3m$

קבלנו ש – p ו – q מתחלקים ב – 3 בסתירה לכך שהצגנו את $\sqrt{3}$ כשבר מצומצם.

ג.

נניח ש - $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ הוא שבר רציונלי, נציג אותו כ –

$$\sqrt{3} + \sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$$

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} - \sqrt{3}$$

נעלה בחזקת שלוש

$$2 = \left(\frac{p}{q} - \sqrt{3}\right)^3 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{q}\right)^2\sqrt{3} + 3\frac{p}{q}\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^3$$

$$2 = \frac{p^3}{q^3} - 3\sqrt{3}\frac{p^2}{q^2} + 9\frac{p}{q} - 3\sqrt{3}$$

$$2 = \frac{p^3 + 9pq^2}{q^3} - 3\sqrt{3}\left(\frac{p^2}{q^2} + 1\right)$$

נחלץ את $\sqrt{3}$

$$3\sqrt{3}\left(\frac{p^2}{q^2} + 1\right) = \frac{p^3 + 9pq^2}{q^3} - 2 = \frac{p^3 + 9pq^2 - 2q^3}{q^3}$$

$$3\sqrt{3} = \frac{\frac{p^3 + 9pq^2 - 2q^3}{q^3}}{\frac{p^2}{q^2} + 1} = \frac{\frac{p^3 + 9pq^2 - 2q^3}{q^3}}{\frac{p^2 + q^2}{q^2}} = \frac{p^3 + 9pq^2 - 2q^3}{q(p^2 + q^2)}$$

$$\sqrt{3} = \frac{p^3 + 9pq^2 - 2q^3}{3q(p^2 + q^2)}$$

קבלנו ש - $\sqrt{3}$ הוא מנה של שני שלמים ז״א הוא מספר רציונלי!

טענה : צפיפות המספרים הרציונליים והאי רציונליים במספרים הממשיים.

יהיו $a < b$ שני מספרים ממשיים כלשהם, אזי בקטע הפתוח (a, b) קיים מספר רציונלי ומספר אי רציונלי.

הוכחה

נסמן $\varepsilon = b - a > 0$ נבחר N טבעי כך שמתקיים $\frac{1}{N} < \varepsilon$

אם מסתכל על סדרת המספרים

$$\cdots, -\frac{n}{N}, -\frac{n-1}{N}, \cdots, -\frac{2}{N}, -\frac{1}{N}, 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \cdots, \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}, \cdots$$

המרחק בין כל שני מספרים סמוכים בסדרה הוא $\frac{1}{N}$ ולכן לפחות אחד מהם נמצא בקטע הפתוח (a, b).

בצורה דומה עבור האי רציונליים, נבחר N כך שיתקיים $\frac{\sqrt{2}}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$.

נסתכל על סדרת המספרים

$$\cdots, -\frac{n}{N}\sqrt{2}, -\frac{n-1}{N}\sqrt{2}, \cdots, -\frac{2}{N}\sqrt{2}, -\frac{1}{N}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{N}\sqrt{2}, \frac{2}{N}\sqrt{2}, \cdots, \frac{n-1}{N}\sqrt{2}, \frac{n}{N}\sqrt{2}, \cdots$$

חוץ מ – 0 כל המספרים אי רציונליים. המרחק בין כל 2 מספרים סמוכים בסדרה הוא קטן מ - $\frac{\varepsilon}{2}$

ולכן לפחות שניים מהם נמצאים בקטע הפתוח (a, b).

חסמים

תהי A קבוצה של מספרים. נאמר כי A חסומה מלעיל אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $a \leq M$, M יקרא חסם מלעיל של A.

תהי A קבוצה של מספרים. נאמר כי A חסומה מלרע אם קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $m \leq a$, m יקרא חסם מלרע של A.

נאמר כי A חסומה אם A חסומה מלעיל ומלרע.

דוגמה

הקבוצה $A = [3,5]$ חסומה מלעיל ע"י 7 ומלרע ע"י 2.

הקבוצה $B = (-1, \infty)$ לא חסומה מלעיל וחסומה מלרע ע"י 2-.

הגדרה

- אם ב - A קיים מספר שגדול משאר אברי הקבוצה נקרא לו מקסימום של הקבוצה ונסמנו ב $max\ (A)$.
- אם ב - A קיים מספר הקטן משאר אברי הקבוצה נקרא לו מינימום של הקבוצה ונסמנו ב $min\ (A)$.

בדוגמה הקודמת

$min(A) = 3$, אין מקסימום לקבוצה A. לקבוצה B אין מקסימום ומינימום.

לקבוצה הרבה חסמים מלעיל ומלרע

- לחסם מלעיל הקטן ביותר נקרא סופרימום ונסמנו ב $sup(A)$.

הוא מקיים : 1) הוא חסם מלעיל של A. 2) הוא חסם מלעיל הקטן ביותר של A.

- לחסם מלרע הגדול ביותר נקרא אינפימום ונסמנו ב $inf(A)$.

הוא מקיים : 1) הוא חסם מלרע של A. 2) הוא חסם מלרע הגדול ביותר של A.

הערות

- הסופרימום והאינפימום לא שייכים בהכרח לקבוצה.
- אם $sup(A) \in A$ אזיי $sup(A) = max\ (A)$
- אם $inf(A) \in A$ אזיי $inf(A) = min\ (A)$

הגדרה

הערך השלם של x הוא המספר השלם הגדול ביותר שאינו גדול מ x ונסמנו ב $[x]$.

דוגמה

$$[-3.2] = -4, \qquad [0] = 0, \quad \left[\frac{1}{2}\right] = 0$$

תרגיל

הראו כי עבור $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ מתקיים $inf(A) = 0$.

פתרון

קבוצות של מספרים ממשיים

אם לא צוין אחרת הקבוצה הכללית שלנו היא R – המספרים הממשיים (גם אם נדבר על קבוצה המכילה רק רציונליים).

אקסיומת השלמות

אם $A \subseteq R$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל.

אזי בין כל החסמים מלעיל הממשיים שלה יש אחד שהוא מינימלי ונסמנו ב - $\alpha = supA$.

הוא מקיים שתי תכונות

א. כל איבר $a \in A$ מקיים $a \leq \alpha$. (חסם מלעיל של A).

ב. לכל $\beta < \alpha$ קיים איבר $\tilde{a} \in A$ כך שמתקיים $\beta < \tilde{a}$ (ז"א לא קיים חסם מלעיל קטן מ - α).

בצורה דומה עבור חסם מלרע – $inf A$.

תרגיל

נתונות הקבוצות הבאות

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$$

$$B = \{n | n = 1,2,3,4,5, \cdots\}$$

$$C = \{x | 2 \leq x \leq 3\}$$

$$\Phi = \{\quad\}$$

$$\mathrm{R} = (-\infty, \infty)$$

מלאו את הטבלה הבאה

קבוצה	חסמים מלעיל	חסמים מלרע	מקסימום	מינימום	סופרימום	אינפימום
A						
B						
C						
Φ						
R						

תרגיל

תהי $A \subseteq R$. נאמר ש - A חסומה, אם היא חסומה למעיל ומלרע.

הוכיחו ש - $A \subseteq R$ חסומה, אמ"מ קיים $L \geq 0$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $|a| \leq L$.

פתרון

צד ראשון, נתון שקיים $L \geq 0$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $|a| \leq L$.

ז"א $-L \leq a \leq L$ ולכן $\pm L$ הם החסמים מלעיל ומלרע שלה. ולכן הקבוצה חסומה.

צד שני – נניח שהקבוצה חסומה. יהיו m חסם מלרע ו M – חסם מלעיל, אז לכל $a \in A$ מתקיים

$$m \leq a \leq M$$

נסמן $L = max\,\{|m|,|M|\}$. ולכן

$$-L \leq m \quad and \quad M \leq L$$

ולכן לכל $a \in A$ מתקיים $-L \leq a \leq L$ ז"א $|a| \leq L$.

תרגיל

תהי

$$A=\left\{a_n|a_n=\frac{[nb]}{n}, \qquad n=1,2,3,4,5,\cdots\right\}$$

כאשר b קבוע נתון. הוכיחו ש- A חסומה ומצאו את $supA$.

פתרון

נשתמש בתכונה של הערך השלם

$$x-1\le[x]\le x$$

ולכן אצלנו לכל n מתקיים

$$\frac{nb-1}{n}\le\frac{[nb]}{n}\le\frac{nb}{n}$$

$$b-\frac{1}{n}\le\frac{[nb]}{n}\le b$$

הוכחנו שהקבוצה חסומה מלעיל ומלרע ולכן היא חסומה. בנוסף הוכחנו שהיא חסומה מלעיל ע״י b. נראה שהוא הסופרימום.

נראה שלא קיים חסם מלעיל הקטן ממנו. נניח בשלילה שקיים $\beta<b$ שהוא חסם של הסדרה.

נסמן $\varepsilon=b-\beta>0$, נבחר $\tilde{n}$ כך שמתקיים $\frac{1}{\tilde{n}}<\varepsilon$ ונסתכל על האיבר במקום $\tilde{n}$.

$a_{\tilde{n}}\in A$ ערכו הוא $a_{\tilde{n}}=\frac{[\tilde{n}b]}{\tilde{n}}$ לפי החסמים שמצאנו מקודם מתקיים

$$b-\frac{1}{\tilde{n}}<a_{\tilde{n}}$$

היות ודרשנו ש - $\frac{1}{\tilde{n}}<\varepsilon$ לכן $-\varepsilon<-\frac{1}{\tilde{n}}$ ז״א

$$\beta = b - \varepsilon < b - \frac{1}{\tilde{n}} < a_{\tilde{n}}$$

ז״א ש- β לא חסם מלעיל.

תרגיל

תהיינה A ו $-B$ קבוצות לא ריקות, נגדיר שתי קבוצות חדשות:

$$A + B = \{a + b | a \in A\ , b \in B\}$$

$$A \cdot B = \{a \cdot b | a \in A\ , b \in B\}$$

א. הוכיחו שאם קיימים $maxA,\ maxB$ אז קיים גם מקסימום בקבוצה $A+B$ ומתקיים

$$maxA + B = \ \ maxA + maxB$$

ב. הוכיחו ש -

$$supA + B = \ \ supA + supB$$

ג. תנו דוגמה שבה

$$supA \cdot B \neq \ \ supA \cdot supB$$

פתרון

א.

יהי a_n האיבר המקסימלי ב $-A$ ו - b_k האיבר המקסימלי ב - B. נסמן $c_l = a_n + b_k$.

c_l שייך לקבוצה $C = A + B$ והוא המקסימום של $A+B$ כי כל איבר c ב - C ניתן להציג כ -

$c = a + b$ כאשר $a \in A\ , b \in B$ ומכיון שמתקיים $a \le a_n, b \le b_k$ לכן

$$c = a + b \le a_n + b_k = c_l$$

והוכחנו ש –

$$maxA + B = c_l = \ \ maxA + maxB$$

ב.

כאשר הקבוצות חסומות וקיימים חסמים סופיים לקבוצות, נסמן ב -

$$\alpha = supA, \qquad \beta = supB$$

נסמן $\gamma = \alpha + \beta$ ונראה ש - $\gamma = supA + B$.

נוכיח שני דברים.

א. γ חסם מלעיל של $A + B$:

כל $c \in A + B$ ניתן להציג כ- $c = a + b$ כאשר $a \in A, b \in B$ הואיל ומתקיים

$a \leq \alpha, b \leq \beta$ לכן $c = a + b \leq \alpha + \beta = \gamma$.

ב. לכל $0 < \varepsilon$, $\gamma - \varepsilon$ לא חסם מלעיל של $A + B$.

ע״פ הנתונים $\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$ לא חסם מלעיל של A ו - $\beta - \frac{\varepsilon}{2}$ לא חסם מלעיל של B. ז״א שקיימים

$a_0 \in A, b_0 \in B$ כך ש- $a_0 > \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$ ו - $b_0 > \beta - \frac{\varepsilon}{2}$. ולכן

$$c_0 = a_0 + b_0 > \alpha - \frac{\varepsilon}{2} + \beta - \frac{\varepsilon}{2} = \alpha + \beta - \varepsilon = \gamma - \varepsilon$$

לכן $\gamma - \varepsilon$ לא חסם מלעיל של $A + B$

ג.

דוגמה נגדית

$$A = \{-1,2\} \;\; B = \{0,-1\}$$

$$supA \cdot B = 1 \neq 0 = 2 \cdot 0 = supA \cdot supB$$