תרגול 13

טורי מספרים

מטרה: בהינתן סדרה, נרצה לבדוק האם סכום אבריה מתכנס.

הגדרה: תהי $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת מספרים, נגדיר סדרה חדשה S_n ע״י סדרת הסכומים החלקיים של $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ בצורה הבאה.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

אם $L \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S_n$ נרשום $\sum_{k=1}^{n} a_k = L$ ובמקרה זה נאמר שהטור מתכנס.

תרגילים

טור טלסקופי

1. האם הטור $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$ מתכנס?7

פתרון

נשים לב שע״י פירוק לשברים חלקיים נקבל:

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right]$$

לכן את הטור שלנו נוכל לרשום בצורה הבאה:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left[1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right] + \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right] + \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right] + \cdots + \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{2k-1}} - \frac{1}{2k+1}\right]$$

לאחר צמצום האברים הדומים, נקבל:

$$S_n = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2k+1}\right]$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{1}{2}$$

והטור מתכנס.

2. האם הטור $\sum_{n-1}^{k} ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ מתכנס?

פתרון

משפט

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ מתכנס אמ״מ $\alpha > 1$

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהכרח האיבר הכללי שואף ל -0. נשים לב שזה תנאי הכרחי אך לא מספיק.

סדרה הנדסית שמנתה $|q| < 1$ מתכנסת וסכומה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{a_0}{1-q}$

תרגילים

1. האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{3^n}$ מתכנס

פתרון

הטורים $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$ מתכנסים כי המנה שלהם קטנה (בע״מ) מ – 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4},\ \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 3$$

ולכן גם הטור שלנו מתכנס וסכומו שווה לסכומם, דהיינו : $3\frac{3}{4}$.

2. האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+4^n}{3^n}$ מתכנס

פתרון

טורים חיוביים

טור אשר כל אבריו אי שליליים (מכיוון שנוספים אברים אי שליליים עם התקדמות הטור לכן S_n סדרה מונוטונית עולה, והיא מתכנסת אם היא חסומה).

מבחן ההשוואה

אם $\sum a_n$ ו - $\sum b_n$ טורים חיוביים וקיים N כך שלכל $n > N$ $a_n \le b_n$ אזי :

- אם $\sum b_n$ מתכנס אז גם $\sum a_n$ מתכנס
- אם $\sum a_n$ מתבדר אז גם $\sum b_n$ מתבדר

מבחן ההשוואה הגבולי

אם $\sum a_n$ ו - $\sum b_n$ טורים חיוביים וקיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = L$ אזי :

- אם $0 < L < \infty$ הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.
- אם $L = 0$ אם $\sum a_n$ מתכנס אז גם $\sum b_n$ מתכנס
- אם $L = \infty$ אם $\sum b_n$ מתכנס אז גם $\sum a_n$ מתכנס

תרגילים

1. האם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$ מתכנס?

פתרון

נשווה את הטור שלנו לטור $\frac{1}{n^2}$ שידוע שהוא מתכנס. לכל n מתקיים:

$$n^2+n+1>n^2$$

ולכן

$$\frac{1}{n^2+n+1}<\frac{1}{n^2}$$

לכן לפי מבחן ההשוואה גם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$ מתכנס.

2. האם $\sum_{n=1}^{\infty} arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ מתכנס?

פתרון

כאשר $n\to\infty$ מתקיים $\frac{1}{n^2+n+1}\to 0$

נשווה את הטור שלנו לטור בשאלה הקודמת. נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי, היות ומדובר על סדרות לא נוכל להשתמש בלופיטל ולכן נשתמש במשפט היינה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)}{\frac{1}{n^2+n+1}}$$

נסמן $x=\frac{1}{n^2+n+1}$ כאשר $n\to\infty$ נקבל ש - $x\to 0$ ולכן הגבול יהפוך ל 0 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctan(x)}{x}\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=1$$

הגבול (בפונקציות) קיים ולכן לפי היינה גם גבול בסדרות קיים ושווה ל 1 –.

לכן ממבחן ההשוואה הגבולי נובע שהטורים מתנהגים בצורה זהה. והיות והוכחנו בשאלה הקודמת שהטור מתכנס לכן גם הטור שלנו מתכנס.

3. האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ מתכנס?

פתרון

לכל $x\geq 0$ מתקיים $x\geq sinx$ ולכן $x-sinx\geq 0$ ז"א שהטור $\frac{1}{n}-sin\left(\frac{1}{n}\right)$ שלנו חיובי

כדי למצוא טור להשוואה, נעבור לפונקציות ונסתכל על התחלת הפיתוח של $sinx$ לטור מקלורן:

$$sinx=x-\frac{x^3}{6}+\cdots\ \ \rightarrow\ \ x-sinx=\frac{x^3}{6}+\cdots$$

נציב $x=\frac{1}{n}$ ונקבל $\frac{1}{n}-sin\left(\frac{1}{n}\right)\approx\frac{1}{6n^3}$.

ולכן נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם הטור $\frac{1}{n^3}$. גם פה היות ומדובר על סדרות לא נוכל להשתמש בלופיטל ולכן נשתמש במשפט היינה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}}\underset{\text{היינה}}{=}$$

נסמן $x=\frac{1}{n}$ כאשר $n\to\infty$ נקבל ש - $x\to 0$ ולכן הגבול יהפוך ל 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x^3}\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{3x^2}\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{6x}=\frac{1}{6}$$

הגבול (בפונקציות) קיים ולכן לפי היינה גם גבול בסדרות קיים ושווה ל $\frac{1}{6}$ –.

לכן ממבחן ההשוואה הגבולי נובע שהטורים מתנהגים בצורה זהה. לכן גם הטור שלנו מתכנס.

4. האם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2n-1}$ מתכנס?

פתרון

5. האם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ מתכנס?

פתרון

6. הראו שאם $\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ מתבדר ו- $d_n>0$ לכל n אז גם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{1+d_n}$ מתבדר.

פתרון

מבחן השורש (קושי) ומבחן המנה (דריכלה)

תהי a_n סדרה חיובית (החל ממקום מסוים) ו - $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ או $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$ אזי:

- אם $0<L<1$ אז $\sum a_n$ מתכנס.
- אם $1<L$ אז $\sum a_n$ מתבדר.
- אם $L=0$ אזי המבחן לא עוזר לנו לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר.

תרגילים

1. האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n^2}$ מתכנס?

פתרון

עבור $n > |\alpha|$ הטור חיובי , נשתמש במבחן השורש :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+\alpha}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{e^\alpha}$$

לכן :

- אם $1 > \alpha > 0$ אזי $1 > \frac{1}{e^\alpha}$ והטור מתכנס
- אם $0 > \alpha$ אזי $1 < \frac{1}{e^\alpha}$ והטור מתבדר
- אם $\alpha = 0$ אזי הטור הוא $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ ולכן מתבדר (האיבר הכללי לא שואף ל $0 -$).

2. האם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}$ מתכנס?

פתרון

נשתמש במבחן השורש :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{4} \le \lim_{n\to\infty}\frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

לכן הטור מתכנס.

3. האם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+n}{3^n}$ מתכנס?

פתרון

חשוב לשים לב שבאי שוויונות צריך לדרוש $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L < 1$ או $\sqrt[n]{a_n} \leq L < 1$ א״א להחליף את

הדרישות ב - $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ או $\sqrt[n]{a_n} < 1$.

דוגמה : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ מקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} < 1$ לכל n אבל הטור מתכנס אמ״מ $\alpha > 1$.

4. האם $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ מתכנס?

פתרון

נשתמש במבחן השורש :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\sqrt[n]{n} = \frac{2}{3} < 1$$

ולכן הטור מתכנס.

5.

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^n}$, $a > 0$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2^n}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

מבחן האינטגרל

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ויורדת בקטע $[0,\infty)$ ונניח $f(n)=a_n$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

והאינטגרל המוכלל $\int_a^{\infty} f(x)dx$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

תרגילים

1. האם $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nlnn}$ מתכנס?

פתרון

נגדיר $f(x)=\frac{1}{xlnx}$ לכל $x\geq 2$ הפונקציה רציפה, חיובית ויורדת כי

$$\forall x\geq 2 \quad f'(x)=-\frac{lnx+1}{(xlnx)^2}<0$$

נבדוק האם האינטגרל מתכנס:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{xlnx} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{xlnx}dx \underset{t=lnx}{=} \lim_{b\to\infty} \int_{ln2}^{lnb} \frac{dt}{t} =$$

$$\lim_{b\to\infty} [lnt]_{ln2}^{lnb} = \lim_{b\to\infty} [ln\,(lnb) - ln\,(ln2)] = \infty$$

ולכן גם הטור מתבדר.

2. האם $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n\cdot lnn\cdot ln[\ln{(n)}]\cdot ln\{ln[ln(n)]\}}$ מתכנס עבור $k>e^{10}$?

פתרון

טורים כללים

טורים עם ∞ אברים חיוביים ו- ∞ אברים שליליים.

הגדרה

אם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס נקרא לטור מתכנס בהחלט.

אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אבל לא בהחלט נקרא לטור מתכנס בתנאי.

משפט

אם טור מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס.

תרגילים

1. האם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|sin\,(n)|}{2^n}$ מתכנס?

פתרון

הטור חיובי ומתקיים:

$$S_n=\frac{|sin\,(1)|}{2^1}+\frac{|sin\,(2)|}{2^2}+\cdots+\frac{|sin(n)|}{2^n}\leq$$

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\underset{\text{סכום סדרה הנדסית}}{=}\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right]}{\frac{1}{2}-1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

לכן $0<S_n<1$ כלומר סדרת הסכומים החלקיים חסומה ולכן הטור מתכנס.

2. האם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,(n^2+2n)}{n^2+4n}$ מתכנס?

פתרון

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\left|\frac{sin\,(n^2+2n)}{n^2+4n}\right| \le \frac{1}{n^2+4n} \le \frac{1}{n^2}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס ולכן הטור שלנו מתכנס בהחלט ולכן לפי המשפט מתכנס.

3. האם $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{sin\,(n)}{nlnn^2n}$ מתכנס?

פתרון

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\left|\frac{sin\,(n)}{nlnn^2n}\right| \le \frac{1}{nln^2n} = \frac{1}{nln^2n}$$

הטור החיובי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nln^2n}$ מתכנס לפי מבחן האינטגרל:

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{xln^2x} = \lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{1}{xln^2x}dx \underset{t=lnx}{=} \lim_{b\to\infty}\int_{ln2}^{lnb}\frac{dt}{t^2} =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_{ln2}^{lnb} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{lnb}-\left(-\frac{1}{ln2}\right)\right] = \frac{1}{ln2}$$

ולכן ממבחן ההשוואה הטור שלנו מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

טור מחליף סימן

טור נקרא מחליף סימן, אם האברים מחליפים סימן לסרוגין

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n,\quad a_n>0$$

משפט לייבניץ

אם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת ו - $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי:

- הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ מתכנס.
- סכום הטור מקיים $0 < S_n < a_1$
- לכל n השארית של הטור $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ מקיימת $|R_n| \le a_{n+1}$

תרגילים

1. העריכו את השארית R_4 של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$.

פתרון

ע״פ משפט לייבניץ הטור מתכנס והשארית שלו לא עולה על:

$$|R_4| \le a_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

2. בדקו התכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{n(3n+1)}$.

פתרון

הטור מחליף סימן. והסדרה $a_n = \frac{(2n+1)}{n(3n+1)}$ מונוטונית יורדת כי

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(2n+3)}{(n+1)(3n+4)} - \frac{(2n+1)}{n(3n+1)} =$$

$$= \frac{(2n+3)n(3n+1) - (2n+1)(n+1)(3n+4)}{(n+1)n(3n+4)(3n+1)} =$$

$$\frac{n(6n^2+11n+3)-(n+1)(6n^2+11n+4)}{(n+1)n(3n+4)(3n+1)}=$$

$$\frac{(6n^3+11n^2+3n)-(6n^3+6n^2+11n^2+11n+4n+4)}{(n+1)n(3n+4)(3n+1)}=$$

$$\frac{-(6n^2+12n+4)}{(n+1)n(3n+4)(3n+1)}<0$$

בנוסף

$$a_n=\frac{(2n+1)}{n(3n+1)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ולכן תנאי משפט לייבניץ מתקיימים והטור מתכנס.

3. כמה אברים דרושים לחישוב הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$ בדיוק של 10^{-6}.

פתרון

הטור מקיים את דרישות משפט לייבניץ (האיבר הכללי שואף לאפס והסדרה מונוטונית יורדת).

לכן $|R_n|\le a_{n+1}$. נדרוש

$$a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}}\le 10^{-6}$$

$$\frac{1}{10^{-6}}\le\sqrt{(n+1)^2+1}\ \ \to\ \ 10^6\le\sqrt{(n+1)^2+1}\ \ \to\ \ 10^{12}\le(n+1)^2+1$$

$$10^{12}\le(n+1)^2\ \ \to\ \ 10^6-1\le n$$

מספיק לחבר 10^6-1 כדי לקבל את הדיוק הנדרש.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^n}$

א. האם הטור מקיים את תנאי משפט לייבניץ?

ב. האם הטור מתכנס?

פתרון

א. התנאי $a_n = \frac{1}{n+(-1)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ מתקיים, אבל הסדרה לא יורדת מונוטונית כי עבור n – ים זוגיים

$a_n = \frac{1}{n+1}$ ועבור n – ים אי זוגיים $a_n = \frac{1}{n-1}$ ולכן:

$$a_{2k+1} - a_{2k} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} > 0$$

ז"א $a_{2k+1} > a_{2k}$ והטור אינו טור לייבניץ.

ב. עבור n מספיק גדול, האיבר הכללי של הטור $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^n}$ מתנהג כמו $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ הוא טור לייבניץ ולכן מתכנס. לכן נשער שהטור המקורי גם מתכנס. נוכיח זאת ע"י בדיקת ההפרש בין שני הטורים.

$$\underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^n}}_{a_n} - \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{b_n} = (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{n+(-1)^n} - \frac{1}{n}\right] = (-1)^{n+1}\left[\frac{n-n-(-1)^n}{n(n+(-1)^n)}\right] =$$

$$(-1)^{n+1}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+(-1)^n)}\right] = (-1)^{2n+2}\left[\frac{1}{n(n+(-1)^n)}\right] = \frac{1}{n(n+(-1)^n)}$$

נטור החדש מתכנס ע"פ ממבחן ההשוואה לטורים חיוביים עם הטור $\frac{1}{n^2}$

לסיכום:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^n}}_{\text{הטור המקורי}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{\substack{b_n \\ \text{מתכנס לייבניץ}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+(-1)^n)}}_{\text{הוכחנו שמתכנס}}$$

הוכח / הפרך

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$

לא נכון, דוגמה נגדית : הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ מתכנס לייבניץ אבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ הוא הטור הרמוני

והוא מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$

נכון, היות ו - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהכרח ש - 0 $a_n \underset{n\to\infty}{=\longrightarrow}$ לכן קיים n שהחל ממנו $a_n < 1$ ולכן

$0 < {a_n}^2 < a_n$ וממבחן ההשוואה לטורים חיוביים נובע ש- $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ מתכנס.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ מתכנס האם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

לא נכון, דוגמה נגדית : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

הערה חשובה

המונוטוניות במשפט לייבניץ חשובה, נסתכל על הטור

$$n \geq 2, \quad \frac{1}{\sqrt{n}-1}, -\frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

זהו טור עם סימנים מתחלפים

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}, -\frac{1}{\sqrt{2}+1}, \frac{1}{\sqrt{3}-1}, -\frac{1}{\sqrt{3}+1}, \ldots$$

אבל השאיפה לאפס לא מונוטונית והטור אינו מתכנס כי :

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{2}{n-1}$$

וקבלנו טור הרמוני שאינו מתכנס.

שאלות ממבחנים

.1

נתונים הטורים הבאים:

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n-9^n}{2^n n!+n^2},\quad II=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}n}$$

א. I מתכנס ו - II לא מתכנס.

ב. I לא מתכנס ו - II מתכנס.

ג. שני הטורים מתכנסים.

ד. שני הטורים מתבדרים.

פתרון

2

נתונים הטורים הבאים:

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-1)^n n+1.5}\quad,II=\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+sinn}}\right)\right)^2$$

א. I מתכנס ו - II לא מתכנס.

ב. I לא מתכנס ו - II מתכנס.

ג. שני הטורים מתכנסים.

ד. שני הטורים מתבדרים.

פתרון

.3

נתונים הטורים הבאים :

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\quad ,II=\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(1+e^{n})-n)$$

א. I מתכנס ו - II לא מתכנס.

ב. I לא מתכנס ו - II מתכנס.

ג. שני הטורים מתכנסים.

ד. שני הטורים מתבדרים.

פתרון

.4

תהי a_n סדרה חיובית מונוטונית עולה ממש, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ מתבדר.

הטענה איננה נכונה

.5

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ תכנס?

פתרון

שאלות חזרה

1. האם הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ מתכנס?

תשובה : כן.

2.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

א. סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסומה.

ב. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

ג. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ מתכנס.

ד. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} sin^2(a_n)$ מתכנס, אזי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ה. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ מתכנס

תשובה נכונה : ג.

3. האם הטור הבא מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n} cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

תשובה : כן.

4. האם הטור הבא מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^2}$$

תשובה : כן.

5. האם הטור הבא מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

תשובה : כן

.6

האם הטור הבא מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$$

תשובה : כן.

.7

הטורים

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad II = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(1-cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

א. מתכנסים

ב. אינם מתכנסים

ג. I מתכנס ו-II אינו מתכנס

ד. I אינו מתכנס ו-II מתכנס

ה. I מתכנס בהחלט

תשובה נכונה : ג.

.8

הטורים

$$I=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{ln^2 n}{n^{\frac{3}{2}}} \qquad II=\sum_{n=1}^{\infty} arctg\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

א. מתכנסים

ב. אינם מתכנסים

ג. I מתכנס ו-II אינו מתכנס

ד. I אינו מתכנס ו-II מתכנס

תשובה נכונה: א.

.9

הטורים

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg(n)}{\sqrt{n}(n+sin(n))} \qquad II=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-arctg(n)\right)}{n}$$

א. מתכנסים

ב. אינם מתכנסים

ג. I מתכנס ו-II אינו מתכנס

ד. I אינו מתכנס ו-II מתכנס

תשובה נכונה : א.

.10

הטורים

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 \, ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)} \qquad II = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

א. מתכנסים

ב. אינם מתכנסים

ג. I מתכנס ו-II אינו מתכנס

ד. I אינו מתכנס ו-II מתכנס

תשובה נכונה :ד.

.11

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור עם אברים אי שליליים והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$ מתכנס, אז בהכרח גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הטענה לא נכונה

.12

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור עם אברים אי שליליים והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ מתכנס, אז בהכרח גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הטענה נכונה

שאלות נוספות לחזרה

נתונים טורי מספרים הבאים

$$A: \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}, \qquad B: \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+5}{2^n}, \qquad C: \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n3^n - 2}$$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. כל הטורים A, B, C מתכנסים בהחלט.

ב. כל הטורים A, B, C מתכנסים בתנאי.

ג. C מתכנס בהחלט ו- A B מתכנסים בתנאי.

ד. הטורים B, C מתכנסים בתנאי.

ה. B מתכנס בהחלט ו- C מתכנס בתנאי.

תשובה נכונה: ה.

2.

נתונים טורי המספרים הבאים

$$A: \sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad B: \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(ln\, n)^2}, \qquad C: \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. כל הטורים A, B, C מתכנסים.

ב. כל הטורים A, B, C מתבדרים.

ג. C מתכנס והטורים A, B מתבדרים.

ד. הטורים B, C מתכנסים ו- A מתבדר.

ה. B מתכנס והטורים A, C מתבדרים.

תשובה נכונה: ב.

3.

אם טור המספרים $\sum a_n$ מתכנס בהחלט וטור המספרים $\sum b_n$ מתכנס אז טור המספרים $\sum(a_n b_n)$ מתכנס בהחלט.

הטענה נכונה

.4

נתונים טורי המספרים הבאים:

$A: \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{\left(\frac{1}{n}\right)}, \qquad B: \quad \sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{5}{n}\right)^{n}, \qquad C: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n}}$.

איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. הטור C לא מקיים תנאי הכרחי להתכנסות.

ב. הטור C מקיים את תנאי משפט לייבניץ.

ג. הטורים A, B, C מתכנסים.

ד. הטורים A, B, C מתבדרים.

ה. הטורים B ו- A מתבדרים והטור C מתכנס.

ת/ובה נכונה: ה.

.5

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים חיובית המתכנסת למספר 1 $(\lim_{n\to\infty} b_n = 1)$ אז טור המספרים

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2}$ מתכנס.

הטענה נכונה

.6

אם $a_n \neq 0$ לכל n והטור $\sum a_n$ מתבדר אזי הטור $\sum \frac{1}{a_n}$ מתכנס.

הטענה לא נכונה