פתרונות וידאו
מלאים באתר

# תרגול 2

## נושאי התרגול

- הגדרת פונקציות ומושגי יסוד
- פונקציות אלמנטריות

## הגדרת פונקציה

בהינתן 2 קבוצות A ו- B, כלל המתאים **לכל** איבר ב A איבר **יחיד** ב – B נקרא פונקציה.

לקבוצה A נקרא תחום ולקבוצה B נקרא טווח ונסמן $f: A \to B$

בקורס שלנו בדר"כ $A = B = \mathbb{R}$.

**התמונה** של הפונקציה היא כל האיברים ב- B ש $f$ מגיעה אליהם.

קיים $x \in A$ כך ש
$f(x) = y$

בצורה פורמלית

$$Imf = \{y \in B: \exists x \in A \quad f(x) = y\} = \{f(x): x \in A\}$$

**מקור** – כשנתונה תמונה $y$, כל איבר בתחום המקיים $f(x) = y$ נקרא מקור של $y$.

**גרף** – אוסף הזוגות (נק' במישור) $\{x, f(x): x \in A\}$.

נאמר ש $f$ היא **על** אם כל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש $f(x) = y$.

במילים אחרות, אם התמונות של $f$ שוות לטווח או לכל איבר ב – B יש מקור.

נאמר ש $f$ היא חח״ע (חד חד ערכית) אם לכל איבר בתמונה יש מקור יחיד. (בשונה מפונקציה חד ערכית שמחזירה רק ערך אחד לכל המקורות).

כלומר $x_1 \neq x_2 \ \rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2)$

או באופן שקול $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \ x_1 = x_2$

## פונקציה זוגית ואי זוגית

פונקציה זוגית מקיימת $f(x) = f(-x)$ דוגמאות: $cos(x), x^2$

פונקציה זוגית מקיימת $f(x) = -f(-x)$ דוגמאות $sin(x), tan(x), cot(x), x, x^3$

רוב הפונקציות בעולם הן לא זוגיות ולא אי זוגיות, למשל:

$$f(x) = x + x^2 \ \rightarrow \ f(5) = 30$$

$$f(-x) = -x + (-x)^2 = -x + x^2 \ \rightarrow \ f(-5) = 20$$

הגרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לציר ה - $y$.

הגרף של פונקציה אי זוגית נוצר ע״י סימטריה של הגרף עבור ה - $x$ החיוביים סביב ציר ה - $y$ ואז שיקוף שלו ביחס לציר ה – $x$.

תרגילים

1. בדקו זוגיות של הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

פתרון

נשים לב שהפונקציה מוגדרת כל $x$ (המכנה חיובי לכל $x$).

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^4+1}}=\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}=f(x)$$

לכן הפונקציה זוגית.

2. הוכיחו כי כל פונקציה ניתנת לכתיבה באופן יחיד כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית.

פתרון

לכל פונקציה $f(x)$ מתקיים:

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

נראה ש $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ היא פונקציה זוגית ו $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ פונקציה אי זוגית.

$$g(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=g(x)$$

$$\text{י}(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)$$

ובזה הוכחנו קיום.

נוכיח יחידות, שלא קיימות זוגות (שונים) נוספים של פונקציות זוגיות ואי זוגיות כך שסכומן שווה ל $f(x)$.

נניח בשלילה שקיים סוג אחר של פונקציה זוגית $g_1(x)$ ו פונקציה אי זוגית $h_1(x)$ שסכומן שווה ל $f(x)$. מתקיים:

$$g(x)+h(x)=f(x)=g_1(x)+h_1(x)$$

$$g(x)+h(x)=g_1(x)+h_1(x)$$

$$g(x)-g_1(x)=h_1(x)-h(x)$$

צד שמאל הוא הפרש של פונקציות זוגיות ולכן הוא פונקציה זוגית. צד ימין הוא הפרש של פונקציות אי זוגיות ולכן הוא פונקציה אי זוגית.

קבלנו שפונקציה זוגית שווה לפונקציה אי זוגית. רק פונקציה האפס היא בו זמנית זוגית ואי זוגית. ז״א שבשני הצדדים כתוב 0.

$$g(x) - g_1(x) = 0 \quad \rightarrow \quad g(x) = g_1(x)$$

$$h_1(x) - h(x) = 0 \quad \rightarrow \quad h(x) = h_1(x)$$

ז״א שאין זוג חדש אלא הזוג שמצאנו הוא הזוג היחיד.

3. $f$ פונקציה זוגית ו $g$ פונקציה אי זוגית, בדקו זוגיות ואי זוגיות של הפונקציות הבאות:

א. $f \circ g$

$$(f \circ g)(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = f\big(g(x)\big) = (f \circ g)(x)$$

ולכן $f \circ g$ זוגית.

ב. $g \circ f$

$$(g \circ f)(-x) = g\big(f(-x)\big) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$$

ולכן גם $g \circ f$ זוגית.

ג. $g \cdot f$ (כפל)

$$(g \circ f)(-x) = g(-x) \cdot f(-x) = -g(x)f(x) = -(g \cdot f)(x)$$

לכן $g \cdot f$ אי זוגית.

הוכח / הפרך

$f$ פונקציה זוגית ו $g$ פונקציה כלשהי האם $g \circ f, f \circ g$ זוגיות.

פתרון

$$(f \circ g)(-x) = f\big(g(-x)\big)$$

מכאן לא ניתן להמשיך כי לא ידוע תכונת $g$. נבחר $g = x + 1, f = x^2$

$$(f \circ g)(-x) = f(-x + 1) = (-x + 1)^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(x + 1) = (x + 1)^2$$

ולכן ההרכבה לא זוגית.

$$(g \circ f)(-x) = g\big(f(-x)\big) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$$

## פונקציות מונוטוניות

פונקציה מונוטונית עולה אם לכל $x_1 < x_2$ מתקיים $f(x_1) \leq f(x_2)$

פונקציה מונוטונית עולה ממש אם לכל $x_1 < x_2$ מתקיים $f(x_1) > f(x_2)$

פונקציה מונוטונית יורדת אם לכל $x_1 < x_2$ מתקיים $f(x_1) \geq f(x_2)$

פונקציה מונוטונית יורדת אם לכל $x_1 < x_2$ מתקיים $f(x_1) > f(x_2)$

תרגיל

$f$ פונקציה עולה ממש ו $g$ פונקציה יורדת ממש האם הפונקציות הבאות מונוטוניות

א. $f \circ g$

נבדוק לפי הגדרה

$$x_1 < x_2$$

$$g(x_1) > g(x_2)$$

$$f(g(x_1) > f(g(x_2)$$

ולכן $f \circ g$ יורדת ממש.

ב. $g \circ f$

נבדוק לפי הגדרה

$$x_1 < x_2$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$g(f(x_1) > g(f(x_2)$$

ולכן $g \circ f$ יורדת ממש.

ג. $g \cdot f$ (כפל)

נבחר $f = x, g = -x$

$$g \cdot f = -x^2$$

פונקציה זו לא עולה ולא יורדת.

## פונקציה חסומה

$f(x)$ חסומה מלעיל (מלמעלה) אם קיים M כך ש $f(x) \leq M$ בתחום הגדרתה.

$f(x)$ חסומה מלרע (מלמטה) אם קיים m כך ש $f(x) \geq m$ בתחום הגדרתה.

$f(x)$ פונקציה חסומה אם היא חסומה מלעיל ומלרע.

## פונקציה מחזורית

$f(x)$ תקרא פונקציה מחזורית, אם קיים T כך שלכל $x$ מתקיים $f(x) = f(x+T)$

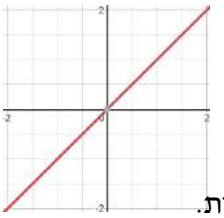
# פונקציות אלמנטריות

יש מספר סוגים של פונקציות שנכנסות תחת ההגדרה של פונקציות אלמנטריות:

1. **פולינומים** – פולינום ממעלה $n$ הוא

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

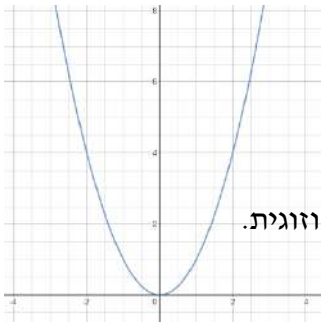
דוגמה 1:



$$p(x) = x$$

$p$ – ת״ה כל $x$, חח״ע, על, מונוטונית (עולה), לא מחזורית, לא חסומה, ואי זוגית.

דוגמה 2:



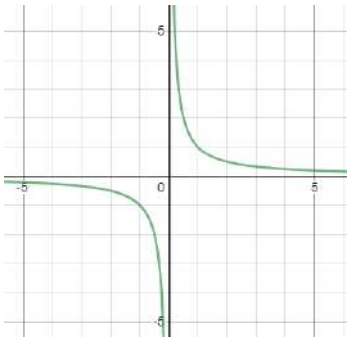
$$p(x) = x^2$$

$p$ – ת״ה כל $x$, לא חח״ע, לא על, לא מונוטונית, לא מחזורית, לא חסומה, וזוגית.

2. **פונקציות רציונליות** – פונקציות מהצורה $\frac{p(x)}{q(x)}$ כאשר $p(x), q(x)$ הם פולינומים.

ת״ה כל ה - $x$ כך ש $q(x) \neq 0$.

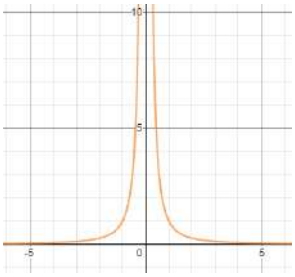
דוגמה 1:



$$p(x) = \frac{1}{x}$$

$p$ – חח״ע, לא על, לא מונוטונית, לא מחזורית, לא חסומה, ואי זוגית.

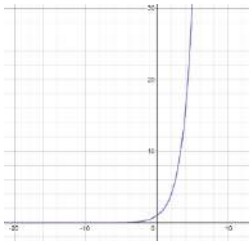
דוגמה 2:



$$p(x) = \frac{1}{x^2}$$

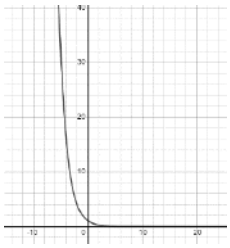
$p$ – לא חח״ע, לא על, לא מונוטונית, לא מחזורית, לא חסומה, וזוגית.

3. **פונקציות מעריכיות** $f(x) = a^x, 0 < a \neq 1$



יש שתי צורות של הפונקציה המעריכית

אם הבסיס $a$ גדול מ- 1 , הפונקציה מונוטונית עולה.



אם הבסיס שבר (חיובי) הפונקציה מונוטונית יורדת.

## הרכבה של פונקציות

יהיו $f: x \to y$ ו $g: y \to z$ נגדיר הרכבה של פונקציות בצורה הבאה:

$$g \circ f: x \to z, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

דוגמה:

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = cos(x) - 2$$

אזי

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2 + 3) = cos(x^2 + 3) - 2$$

נשים לב שאם נשנה את סדר ההרכבה נקבל פונקציה שונה:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(cos(x) - 2) = (cos(x) - 2)^2 + 3$$

פונקציה הפוכה

בהינתן $f: A \to B$ חח"ע ועל נוכל להגדיר פונקציה הפוכה $f^{-1}: B \to A$ ע"י $f^{-1}(b) = a$ כאשר $f(a) = b$. ומתקיים $f(f^{-1}(b)) = b$, $f^{-1}\big(f(a)\big) = a$.

גרף הפונקציה ההפוכה מתקבלת ע"י שיקוף גרף הפונקציה המקורית סביב הישר $y = x$.

דוגמה

$f(x) = x + 3$ נמצא את הפונקציה ההפוכה ע"י בידוד ה - $x$.

$$y = x + 3 \quad \rightarrow x = y - 3$$

לכן

$$f^{-1}(y) = y - 3$$

ישנם ספרים שלאחר שמצאו את הפונקציה ההפוכה חוזרים לרשום אותה כפונקציה של $x$.

נבדוק שלא טעינו :

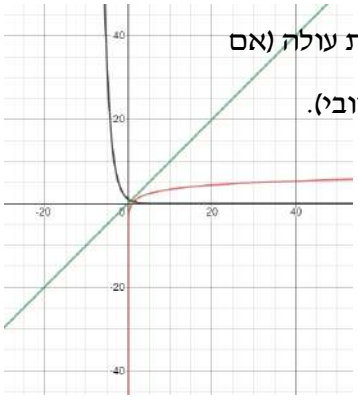
$$f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(x+3) = x + 3 - 3 = x$$

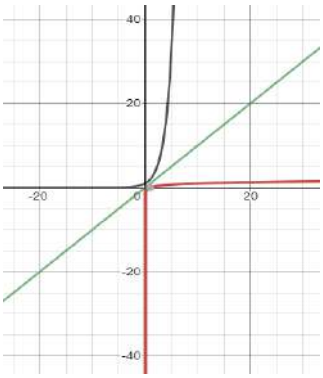
$$f(f^{-1}(y)) = f(y-3) = y - 3 + 3 = y$$

4. **פונקציות לוגריתמיות** – הפונקציה ההפוכה לפונקציה המעריכית.

לוגריתם היא הפעולה ההפוכה לחזקה.

בדומה לפונקציות המעריכיות גם לפונקציות הלוגריתמיות יש פונקציה מונוטונית עולה (אם בסיס הלוגריתם גדול מ – 1) ופונקציה מונוטונית יורדת (אם הבסיס הוא שבר חיובי).

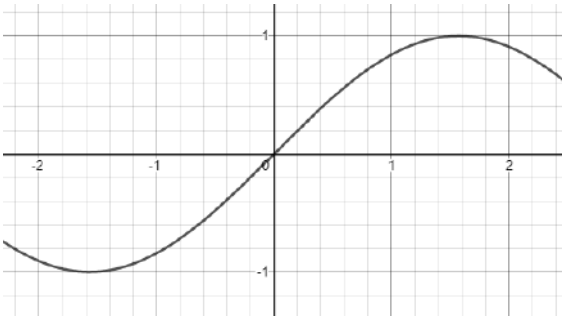


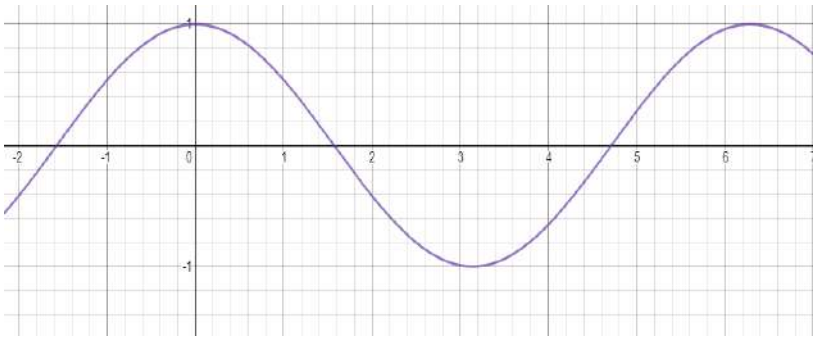




5. **פונקציות טריגונומטריות**

בקורס שלנו נשתמש **רק** ברדיאן.

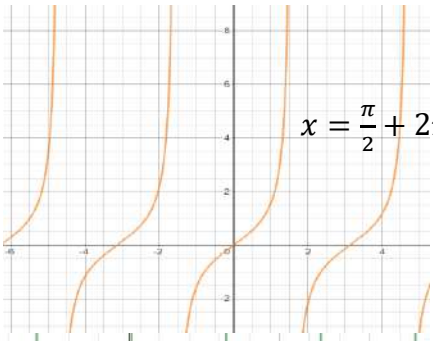
פונקציית $sin(x)$ מחזורית $2\pi$



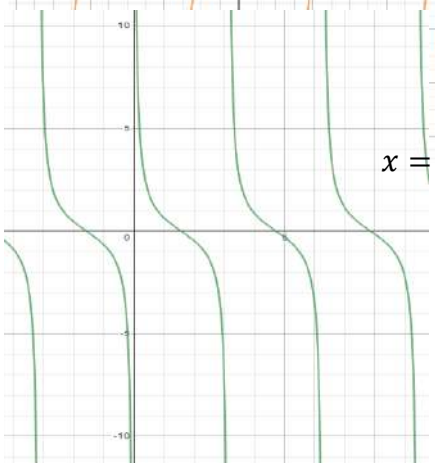


פונקציית $cos(x)$ מחזורית $2\pi$

שתיהן מוגדרות לכל $x$.



פונקציית $tan(x)$ מחזורית $\pi$ לא מוגדרת עבור הזוויות $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi K,\ K \in \mathbb{Z}$



פונקציית $cot(x)$ מחזורית $\pi$ לא מוגדרת עבור הזוויות $x = \pi K,\ K \in \mathbb{Z}$

תרגיל

הראו כי $f(x) = x + \frac{1}{2} sin\ (x)$ היא חח"ע.

פתרון

נסתמך על הטענות הבאות: $|sin\ (x)| \leq |x|,\ \cos\ (x) \leq 1$

יהיו $x_1, x_2$ המקיימים $f(x_1) = f(x_2)$ נראה כי $x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1 + \frac{1}{2}sin(x_1) = x_2 + \frac{1}{2}sin(x_2)$$

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{2}sin(x_2) - \frac{1}{2}sin(x_1)$$

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{2} \cdot 2[sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

$$|x_1 - x_2| = \left|sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\right| \cdot \left|cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right|$$

$$|x_1 - x_2| \leq \left|sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\right|$$

$$|x_1 - x_2| \leq \left|\frac{x_2 - x_1}{2}\right|$$

$$|x_1 - x_2| \leq \left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right|$$

$$2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2$$

$$|x_1 - x_2| \leq 0$$

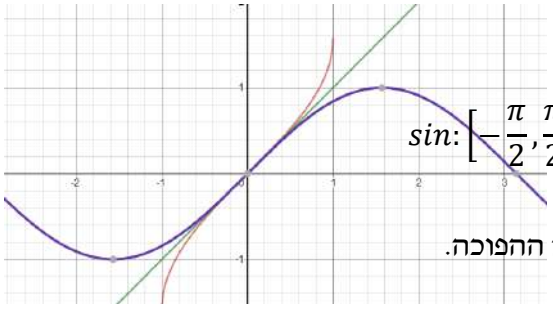
$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

## 6. פונקציות טריגונומטריות הפוכות

נגדיר תחום בו הפונקציות הטריגונומטריות חח"ע ועל ואז נוכל להגדיר את הפונקציה ההפוכה.

עבור $sin$ נבחר

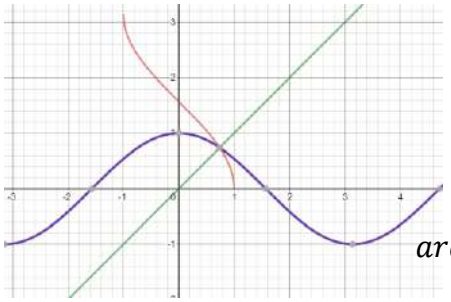


$$sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

ונגדיר את $g(x) = arcsin(x)$ להיות הפונקציה ההפוכה.

$$arcsin(x): [-1,1]\ \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

בצורה דומה עבור $cos$ נבחר

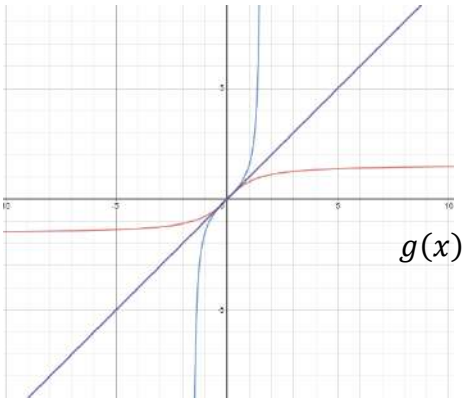


$$cos: [0,\pi] \to [-1,1]$$

ונגדיר את $g(x) = arccos(x)$ להיות הפונקציה ההפוכה.

$$arccos(x): [-1,1] \to\ [0,\pi]$$

עבור $tan$ נבחר



$$tan: \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty,\infty)$$

ונגדיר

$$g(x) = arctan(x): (-\infty,\infty) \to\ \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

תרגיל

הוכיחו כי לכל $-1 \le x \le 1$ מתקיים $cos(arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

פתרון

$$(sint)^2 + (cost)^2 = 1$$

נציב $t = arcsin(x)$

$$(sin\ (arcsin(x)))^2 + (cos\ (arcsin(x)))^2 = 1$$

$$(cos\ (arcsin(x)))^2 = 1 - x^2$$

- בתחום הנ״ל $arcsin(x)$ מחזירה ערך השייך ל - $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ולכן $cos$ מחזירה ערכים חיוביים בלבד ולכן נבחר בשורש החיובי.

- בתחום הנ״ל השורש מוגדר לכל $x$.

לסיכום:

$$cos(arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

פונקציות אלמנטריות הן כל הפונקציות שהוזכרו לעיל וכן כל הפונקציות המתקבלות מהן ע״י פעולות: סכום, הפרש, כפל, מנה והרכבה.

## שאלות ממבחנים

1. נתונה הפונקציה $f:[0,1] \to [0,1]$ חד חד ערכית. מהי הטענה השגויה?

א. $f(f(x))$ היא חד חד ערכית.

ב. אם $f$ הפיכה אז $f$ מונוטונית.

ג. אם $cos\,(\pi f(x)):[0,1] \to [-1,1]$ היא על $[-1,1]$ אז $f$ הפיכה.

ד. לא יתכן כי הפונקציה $f(sin(\pi x))$ היא חד חד ערכית בקטע $[0,1]$.

פתרון

.2

נתונה $f: R \to R$ פונקציה זוגית, נסמן $g(x) = sin\ (f(x))$ . מהי הטענה הנכונה?

א. קיים $x$ כך ש - $g(x) = 0$.

ב. $g(x)$ פונקציה זוגית.

ג. $g(x)$ פונקציה אי זוגית.

ד. $g(x)$ מקבלת מינימום ומקסימום שונים.

ה. $g(x)$ פונקציה מחזורית.

פתרון

שאלות חזרה

1. תהיינה $g(x) = 2x$ , $f(x) = \frac{4}{x-1}$. איזו מהטענות הבאות נכונה?

א- $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ לכל $x$.

ב- לא קיים $x$ עבורו מתקיים: $f \circ g(x) = g \circ f(x)$.

ג- יש בדיוק ערך אחד $x$ עבורו מתקיים: $f \circ g(x) = g \circ f(x)$.

ד- יש בדיוק שני ערכי $x$ עבורם מתקיים: $f \circ g(x) = g \circ f(x)$.

ה- קיים קטע $I$ כך שלכל $x$ ב- $I$ מתקיים: $f \circ g(x) = g \circ f(x)$.

2. נתונות שלוש פונקציות מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$:

$$f(x) = arctan|x|, \qquad g(x) = |e^x - 1|, \qquad h(x) = arctan(|x| - x)$$

איזו מן הטענות הבאות נכונה?

- כל הפונקציות הנתונות הן פונקציות זוגיות.
- כל הפונקציות הנתונות הן פונקציות חסומות ב-$\mathbb{R}$.
- $f(x)$ ו- $h(x)$ אינן חח"ע בתחום הגדרתן הטבעי ו-$g(x)$ חח"ע ב-$\mathbb{R}$.
- הפונקציה $h(x)$ מונוטונית יורדת ממש ב-$\mathbb{R}$.
- התמונה של $f(x)$ ו-$h(x)$ היא $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, התמונה של $g(x)$ היא $(0, \infty)$.

3. תהי $f(x)$ פונקציה כלשהי אז בהכרח הפונקציה $h(x) = f(x) + f(-x)$ היא פונקציה זוגית.

4. $g(x) = arcsin\sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

א. מצאו את $D$, תחום ההגדרה הטבעי (המרבי) של $g$.

ב. מצאו את $E$, התמונה של $g$ בתחום הגדרתה הטבעי.

ג. הראו ש- $g$ חח"ע בכל תחום הגדרתה הטבעי.

ד. נתבונן בפונקציה $g: D \to E$.

- הצדיקו את קיומה של הפונקציה ההפוכה $g^{-1}$. רשמו את תחום ההגדרה ואת התמונה של $g^{-1}$.

ה. מצאו את הפונקציה ההפוכה $g^{-1}$.

.5

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad g(x) = \frac{x}{x-1}$$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

- $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ לכל $x$.
- $f^{-1}(x) = g(x)$.
- התמונה של הפונקציה $g \circ f$ היא כל$\mathbb{R}$ פרט לנקודה $y = 1$.
- תחום ההגדרה הטבעי של $f \circ g$ הוא כל$\mathbb{R}$ פרט לנקודה $x = 1$.
- תחום ההגדרה הטבעי של $g \circ f$ הוא כל $\mathbb{R}$.

.6

$$f(x) = -|1 + arctan\, x|, \qquad g(x) = \begin{cases} arctan(|x-1|)\,, x \geq 0 \\ x + \frac{\pi}{4}, x < 0 \end{cases}, \qquad h(x)$$

$$= \begin{cases} arctan(x-1)\,, x \geq 0 \\ -x - \frac{\pi}{4}, x < 0 \end{cases}$$

לכל אחת מהתכונות הבאות רשמו איזו מן הפונקציות $f, g, h$ עונה על הדרישה.

הפונקציה אינה חסומה מלעיל (מלמעלה)

הפונקציה איננה חסומה מלרע (מלמטה)

הפונקציה היא מונוטונית עולה ממש בקרן $(0, \infty)$

התמונה של הפונקציה היא $\left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$

לפונקציה אין ערך מינימום וגם אין ערך מקסימום

לפונקציה יש אינפימום ואין מינימום

.7 תהיינה $f(x), g(x)$ שתי פונקציות מונוטוניות יורדות ממש בכל $\mathbb{R}$ אז בהכרח הפונקציות $(f \circ g)(x)$ ו- $f(x) \cdot g(x)$ (הרכבה ומכפלה) הן פונקציות מונוטונית עולות ממש בכל $\mathbb{R}$.

8. $g(x) = arcsin(-e^{-x})$

א. מצאו את תחום ההגדרה הטבעי (המרבי) של $g$.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה הנתונה בתחום הגדרתה הטבעי.

ג. הוכיחו שהפונקציה הנתונה $g(x)$ מונוטונית עולה ממש בתחום הגדרתה (אין להשתמש בנגזרת לצורך הוכחת המונוטוניות של הפונקציה).

ד. נסמן ב-$A$ את תחום ההגדרה הטבעי שמצאתם בסעיף א'. נסמן ב-$B$ את התמונה שמצאתם בסעיף ב'. הסבירו מדוע הפונקציה $g: A \to B$ הפיכה.

ה. מצאו את הפונקציה ההפוכה $g^{-1}(x)$.

9. תהיינה $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 10, \quad g(x) = 5$ איזו מהטענות הבאות נכונה?

א- $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ לכל $x$.

ב- לא קיים $x$ עבורו מתקיים: $f \circ g(x) = g \circ f(x)$

ג- יש בדיוק ערך אחד $x$ עבורו מתקיים: $f \circ g(x) = g \circ f(x)$.

ד- יש בדיוק שני ערכי $x$ עבורם מתקיים: $f \circ g(x) = g \circ f(x)$.

ה- קיים קטע $I$ כך שלכל $x$ ב-$I$ מתקיים: $f \circ g(x) = g \circ f(x)$.

10. אם $f(x) = 2 + ln\left(1 + \sqrt{x}\right)$ מוגדרת ב- $[0, \infty)$ אזי $f^{-1}(x)$ שווה ל-

א. $e^{(x-2)^2} - 1$ ב. $e^{(x-2)^2} + 1$ ג. $(e^{x-2} - 1)^2$ ד. $(e^{x-2} + 1)^2$ ה. $e^{x-2} - 1$

11. נתונות שלוש פונקציות מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|}, \qquad g(x) = |arctan\, x|, \qquad h(x) = e^{x-|x|}$$

איזו מן הטענות הבאות נכונה?

א- כל הפונקציות הנתונות הן פונקציות זוגיות.

ב- כל הפונקציות הנתונות הן פונקציות חסומות ב-$\mathbb{R}$.

ג- כל הפונקציות הנתונות הן חח"ע ב-$\mathbb{R}$.

ד- כל הפונקציות הנתונות הן מונוטוניות יורדות ממש ב-$(-\infty, 0)$.

ה- התמונה של $h(x)$ היא$(0,1]$ והתמונה של $g(x)$ היא $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

12. פונקציה $f(x) = ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$ אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

13. מצאו את תחום ההגדרה הטבעי (המרבי) עבור הפונקציה:

$$f(x) = arcsin\left(\frac{x}{x-1}\right) + ln(ln(4x))$$

14.

א. אם $f, g: R \to R$ פונקציות אי זוגיות אזי $f \circ g$ אי זוגית

ב. אם $f, g: R \to R$ ו- $g$ פונקציה זוגית אזי $f \circ g$ זוגית

ג. אם $f, g: R \to R$ פונקציות יורדות אזי $f \circ g$ יורדת

ד. אם $f, g: R \to R$ ו $-f$ פונקציה חסומה אזי $f \circ g$ חסומה

ה. אם $f: R \to R$ פונקציה חסומה וגם $\lim_{n\to\infty} f(n) = 7$ אזי $\lim_{x\to\infty} f(x) = 7$

.15

נתונות $f, g: R \to R$ כך ש - $f$ זוגית ו -$g$ פונקציה אי זוגית אזי

$(f \circ g - g \circ f)(x)$ זוגית

.16

נתונות $f, g: R \to R$ החסומות בקטע $I \subset R$ המקיימות $f(x) > g(x)$ אזי בהכרח

נתונות $\sup_{x \in I} f(x) > \sup_{x \in I} g(x)$

.17

לכל $f, g: R \to R$ כאשר - $f$ עולה ממש ו -$g$ יורדת ממש, מתקיים כי

א. $f \circ g$ עולה ממש

ב. $f \circ g$ יורדת ממש

ג. $g \circ g$ חד חד ערכית

ד. $f \cdot g$ (כפל פונקציות) יורדת ממש.

פתרון

.18

לכל $f, g: R \to R$ מתקיים כי

א. אם $f$ זוגית אזי $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

ב. אם $f$ אי זוגית אזי $\lim_{x\to 1} f(x) = -f(-1)$

ג. אם $\lim_{x\to 0}(f(x) - g(x)) = 1$ וגם $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ אזי $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

ד. אם $\lim_{x\to \infty}(f(x) - g(x)) = 1$ וגם $g(x) \neq 0$ לכל $x$ אזי $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

פתרון