הגדרה

סדרה היא אוסף סדור של מספרים.

סדרה יכולה להיות מוגדרת בעזרת נוסחה מפורשת, למשל: $a_{n=}\log(n)$

סדרה יכולה להיות מוגדרת בעזרת נוסחת נסיגה, למשל: $a_{n+1} = a_n + \text{nlog}(n)\,, a_1 = 1$

סדרה יכולה להיות מוגדרת במילים, למשל:

הספרה ה $- n -$ ית אחרי הנקודה העשרונית ב $- \pi$ $a_{n=}$

הגדרה

סדרה היא פונקציה מהמספרים הטבעיים למספרים הממשיים $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

גבולות

נאמר כי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת לגבול L אם לכל $\varepsilon > 0$ *קיים* N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$. במקרה זה נסמן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

המשמעות של הגבול שהחל ממקום מסוים הסדרה מתקרבת מאוד ל - L.

השיטה למציאת גבולות לפי הגדרה

$$|a_n - L| < \underbrace{\quad}_{\text{הערכות}} < \frac{c}{n} \underbrace{\le}_{\text{נדרוש}} \varepsilon$$

תרגילים

1. הראו לפי הגדרה $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

פתרון

2. הוכיחו לפי הגדרה $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n+1}=\frac{1}{3}$.

פתרון

יהי $\varepsilon>0$ נמצא N כך שלכל $n>N$ מתקיים $\left|\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n+1}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n+1}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3(n^2-n+1)-(3n^2+2n+1)}{3(3n^2+2n+1)}\right|=\left|\frac{-5n+2}{3(3n^2+2n+1)}\right|=$$

$$\frac{5n-2}{9n^2+6n+3}<\frac{5n}{9n^2+6n+3}<\frac{5n}{9n^2}=\frac{5}{9n}\underbrace{\leq}_{\text{נדרוש}}\varepsilon$$

נבחר $N=\left[\frac{5}{9\varepsilon}\right]+1$ עבור $n>N>\frac{5}{9\varepsilon}$ נקבל:

$$\left|\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n+1}-\frac{1}{3}\right|=\cdots=\frac{5}{9n}<\frac{5}{9N}=\frac{5}{9\left[\left[\frac{5}{9\varepsilon}\right]+1\right]}<\frac{5}{9\cdot\frac{5}{9\varepsilon}}=\varepsilon$$

3. הוכיחו לפי הגדרה $n \geq 4$, $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-4}\right)=0$.

פתרון

4. הוכיחו לפי הגדרה $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n+1}\neq 1$.

פתרון

5. הוכיחו לפי הגדרה $\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{n+6}\neq 10$.

פתרון

6. הוכיחו שלסדרה $a_n = 1+(-1)^n$ אין גבול.

פתרון

תרגיל 7

א. הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{n\to\infty}\frac{n+6}{n+4}=1$. ב. הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{n\to\infty}\frac{n+6}{n+4}\neq 2$

פתרון

$$|a_n-L|=\left|\frac{n+6}{n+4}-1\right|=\left|\frac{n+6-n-4}{n+4}\right|=\left|\frac{2}{n+4}\right|=\frac{2}{n+4}<\frac{2}{n}$$

נדרוש $\frac{2}{n}<\varepsilon$ ז"א $\frac{2}{\varepsilon}<n$, נבחר $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$ ועבורו נקבל את הנדרש.

ב. נניח בשלילה שהגבול שווה ל - 2

$$|a_n-L|=\left|\frac{n+6}{n+4}-2\right|=\left|\frac{n+6-2n-8}{n+4}\right|=\left|\frac{-n-2}{n+4}\right|=\frac{n+2}{n+4}=1-\frac{2}{n+4}$$

לכן n טבעי מתקיים $\frac{2}{n+4}\leq\frac{2}{5}$ לכן

$$1-\frac{2}{n+4}\geq 1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

לכן אם נבחר $\varepsilon=\frac{3}{5}$ נקבל כי לכל n מתקיים $\left|\frac{n+6}{n+4}-2\right|\geq\varepsilon$ ולכן 2 לא גבול הסדרה.

תרגיל 8

הוכיחו שלסדרה $a_n=(-1)^n$ אין גבול.

פתרון

נניח בשלילה ש $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ אזי לפי הגדרה קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$a_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\quad\leftrightarrow\quad|a_n-a|<\varepsilon$$

המקומות הזוגיים של הסדרה הם: $a_{2k}=(-1)^{2k}=1$

המקומות האי זוגיים של הסדרה הם : $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$

ומתקיים

$$a_{2k}, a_{2k+1} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \rightarrow \quad -1{,}1 \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2}$

נקבל שאורך הקטע $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ הוא 1, ולא יתכן שהמספרים 1 ו 1- יהיו מוכללים בו.

אריתמטיקה של גבולות

יהיו סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו - $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש $a_n \rightarrow L$ ו - $b_n \rightarrow K$ אזי :

$$a_n + b_n \rightarrow L + K$$

$$a_n - b_n \rightarrow L - K$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow L \cdot K$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{L}{K}, \quad b_n \neq 0$$

$$(a_n)^m \rightarrow L^m$$

הוכח / הפרך

1. $a_n \rightarrow L$ האם $|a_n| \rightarrow |L|$

פתרון

.2 $|L| \leftarrow |a_n|$ האם $a_n \to L$

פתרון:

הערה

הוכיחו כי $|a_n| \to 0$ אמ"מ $a_n \to 0$

פתרון

לפי הגדרה $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ אמ"מ

$$\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ n > N \quad \big||a_n| - 0\big| < \varepsilon$$

ז"א

$$\big||a_n| - 0\big| = \big||a_n|\big| = |a_n| = |a_n - 0|$$

או במילים אחרות

$$\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ n > N \quad |a_n - 0| < \varepsilon$$

זאת ההגדרה ל- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

.3 $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ האם $a_n - b_n \to 0$

פתרון

.4 תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי שלילית, הוכיחו שאם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אז קיים הגבול

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n}$, ומתקיים $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

פתרון

הסדרה $\sqrt{a_n}$ מוגדרת היטב כי $a_n \geq 0$ וגם $L \geq 0$ לכן קיים $\sqrt{L}$.

נוכיח שקיים גבול. יהי $\varepsilon > 0$, צ"ל שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| < \varepsilon$.

אפשרות א:

$L = 0$, ז"א צ"ל $\left|\sqrt{a_n}\right| < \varepsilon$ שזה שקול לכך ש- $|a_n| < \varepsilon^2$.

נתון קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ז"א שעבור $\varepsilon_1 > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n| < \varepsilon_1$

לכן נבחר $\varepsilon_1 = \varepsilon^2 > 0$ ואז קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n| < \varepsilon_1 = \varepsilon^2$ שזה שקול לכך

$\left|\sqrt{a_n}\right| < \varepsilon$.

אפשרות ב - $L > 0$: נכפיל בצמוד

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| = \frac{\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right|\left|\sqrt{a_n} + \sqrt{L}\right|}{\left|\sqrt{a_n} + \sqrt{L}\right|} = \frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} \leq \frac{|a_n - L|}{\sqrt{L}}$$

היות ונתון קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ז"א שעבור $\varepsilon_1 = \sqrt{L} \cdot \varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$

מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon_1$ ונקבל שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$\frac{|a_n - L|}{\sqrt{L}} < \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{L}} = \frac{\sqrt{L} \cdot \varepsilon}{\sqrt{L}} = \varepsilon$$

תרגילים חישוביים

1. חשבו $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{16n^2 + 3n} - 4n\right)$

פתרון

2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

3.

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^2\cdot sin(n\pi)+\frac{1-n^2}{n}\right]=$$

סדרה הנדסית
מתכנסת

4.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k\cdot n}=\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=0$$

5.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=$$

6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^7+5n+8}{7n^7+47n+29}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n^6}+\frac{8}{n^7}}{7+\frac{47}{n^6}+\frac{29}{n^7}}=\frac{1+0+0}{7+0+0}=\frac{1}{7}$$

7.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1-n)\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

השתמשנו : כפל בצמוד, נחלק מונה ומכנה ב - $\sqrt{n}$, אריתמטיקה של גבולות ובטענה

$$0\le a_n\to L\ \Longrightarrow\sqrt{a_n}\to\sqrt{L}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

כלל הסנדוויץ'

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ונניח שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $b_n < a_n < c_n$ ו –

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

גבולות נוספים

א. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ולכן גם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

ב. לכל $0 < c$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$

הוכחה

א. לפי אי שוויון הממוצעים לסדרה: $\sqrt{n}, \sqrt{n}, 1,1, \dots 1$ ($n-2$ פעמים 1)

$$1 \le \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1 \cdots 1} \le \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+1+\cdots 1}{n} = \frac{2\sqrt{n}}{n} + \frac{n-2}{n}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

ולכן מסנדוויץ' $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

ב. יהי $0 < c$ עבור n מספיק גדול מתקיים $\frac{1}{n} < c < n$ הכול חיובי ולכן ניתן להוציא שורש

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{c} < \sqrt[n]{n}$$

הוכחנו שהקצוות שווים 1 ולכן מסנדוויץ' $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

תרגילים

1. חשבו $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{3^n + 5^n}\right)$

פתרון

$$5 \le \sqrt[n]{3^n + 5^n} \le \sqrt[n]{5^n + 5^n} \le \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} \le \sqrt[n]{2} \cdot 5 \to 5$$

אם נסמן $b_n = 5$ ו - $c_n = \sqrt[n]{2} \cdot 5$ נקבל לפי משפט הסנדוויץ' $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{3^n + 5^n}\right) = 5$.

2. חשבו $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

פתרון

3. חשבו $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\ln(n+2))}{n}$

פתרון

נשתמש במשפט הסנדוויץ'

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin(\ln(n+2))}{n} \le \frac{1}{n}$$

שני הצדדים שואפים ל – 0 באינסוף לכן גם הגבול שלנו שווה 0.

4. חשבו $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$

פתרון

נשתמש במשפט הסנדוויץ'

$$1 \le \sqrt{1+\frac{1}{n}} \le 1+\frac{1}{n}$$

שני הצדדים שואפים ל – 1 באינסוף לכן גם הגבול שלנו שווה 1.

5.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{n^2+\sqrt{k}}$$

הערה

אם $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ו- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ והחל מ- n מסוים $b_n \ge a_n$ אז $b \ge a$.

אם נחזק הדרישה ש- $b_n > a_n$ עדיין נשאר $b \ge a$ (ולא $b > a$).

דוג' $a_n = 3, b_n = 3+\frac{1}{n}$ אבל $a=b=3$.

6.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1-n)\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

נשתמש בזהות $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, ז"א $a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ בתנאי שהמכנה לא מתאפס, אצלנו $a=\sqrt[3]{n+1}, b=\sqrt[3]{n}$

$$0<\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\frac{n+1-n}{\sqrt[3]{n+1}^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2}$$

$$<\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

לכן ממשפט הסנדוויץ' $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)=0$.

.7

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$$

$$0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\frac{4}{n}\cdots\frac{n}{n}\right)\le\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

לכן ממשפט הסנדוויץ' $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

הגדרה

נאמר כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאינסוף אם לכל $M>0$ קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n>M$ במקרה זה נסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

הפעם השיטה להוכחת גבול לפי הגדרה תהיה

$$a_n>\underbrace{}_{\text{הערכות}}>M\quad\leftrightarrow\quad N=f(M)$$

תרגילים

1. הוכיחו לפי הגדרה $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3n}=\infty$.

פתרון

2. הוכיחו לפי הגדרה $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-7n}{n^2+6}=\infty$.

פתרון

בהינתן $M>0$ נבחר $N=[7(M+7)]+1$ לכל $n>N$ מתקיים:

$$a_n=\frac{n^3-7n}{n^2+6}>\frac{n}{7}-7>\frac{N}{7}-7=\frac{[7(M+7)]+1}{7}-7>\frac{[7(M+7)]}{7}-7=M$$

3*.

נכון / לא נכון

אם a_n, b_n סדרות חיוביות המתכנסות לאפס, אז $\lim\limits_{n\to\infty}{a_n}^{b_n}=1$.

הטענה לא נכונה

$$a_n=\frac{1}{n^n}, b_n=\frac{1}{n}$$

אז

$${a_n}^{b_n}=\left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\rightarrow}0$$

.3

נתונות 2 סדרות המקיימות$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו - $0 < q \leq b_n$ לכל n הוכיחו $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$

הוכחה

.4

הוכיחו לפי הגדרה $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-3n}}{\sqrt[3]{n^2+4}} = \infty$

הוכחה

יהי $0 < M$, צ״ל N כל שלכל $N < n$ יתקיים $\frac{\sqrt{n^3-3n}}{\sqrt[3]{n^2+4}} > M$.

לכל $3 \leq n$

$$\frac{\sqrt{n^3-3n}}{\sqrt[3]{n^2+4}} > \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt[3]{n^2+7n^2}} = \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt[3]{8n^2}} = \frac{\sqrt{n^2}}{2\sqrt[3]{n^2}} = \frac{\sqrt[3]{n}}{2}$$

עבור $3 \leq n$ מתקיים

$$n^3 - 3n = n(n^2-3) \geq n(n^2-n) = n^2(n-1) > n^2$$

$$n^2 + 4 \leq n^2 + 7n^2 = 8n^2$$

לכן נדרוש $\frac{\sqrt[3]{n}}{2} > M$ ז״א $n > (2M)^3$. ונבחר $M = max\{(2M)^3, 3\}$.

השתמשנו : בהקטנת המונה והגדלת המכנה

.5

הוכיחו או הפריכו

אם

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות מונוטוניות, אזי הסדרה $c_n = a_n + b_n$ מתכנסת במובן הרחב.

הטענה לא נכונה

$$a_n = 3n + (-1)^n, \qquad b_n = -3n$$

b_n מונוטונית יורדת, a_n מונוטונית עולה, כי

$$a_{n+1} - a_n = [3n + 3 + (-1)^{n+1}] - [3n + (-1)^n] = 3 + (-1)^n(-1 - 1)$$
$$= 3 - 2(-1)^n > 1$$

אבל

$$c_n = (-1)^n$$

לא מתכנסת (אפילו במובן הרחב).

גבול סדרה הנדסית עם מנה q :

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \text{אין גבול} & q \le -1 \end{cases}$$

הוכחה

אם $q > 1$ נרשום $q = 1 + a$, $0 < a$

לפי אי שוויון ברנולי

$$q^n = (1 + a)^n \ge 1 + na \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$$

אם $0 < |q| < 1$ נרשום $a > 0$ $\frac{1}{|q|} = 1 + a,$ $1 <$ ושוב לפי אי שוויון ברנולי

$$0 < |q|^n = \frac{1}{\frac{1}{|q|^n}} = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

מבחן השורש

תרגיל

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ויהיו N מספר טבעי ו - $0 \leq q$ ממשי. הוכיחו

- אם $0 \leq q < 1$ ולכל $n \geq N$ מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $q > 1$ ולכל $n \geq N$ מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
- אם $0 \leq q < 1$ ולכל $n \geq N$ מתקיים $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $q > 1$ ולכל $n \geq N$ מתקיים $\sqrt[n]{a_n} \geq q$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

הוכחת ב'

עבור $n = N$ מתקיים $\frac{a_{N+1}}{a_N} \geq q$ ז"א $a_{N+1} \geq a_N q$

עבור $n = N + 1$ מתקיים $\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \geq q$ ז"א $a_{N+2} \geq a_{N+1} q \geq a_N q^2$

באינדוקציה לכל k טבעי $a_{N+k} \geq a_N q^k$

כיון ש - $q > 1$ ו - a_N קבוע, לכן $\lim_{n\to\infty} a_N q^k = \infty$ ולכן $\lim_{k\to\infty} a_{N+k} = \infty$ ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

מבחן המנה

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ונניח שקיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q$ אזי :

- אם $q > 1$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
- אם $q < 1$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $q = 1$ לא ניתן לקבוע $\left(\begin{matrix} a_n = 1 \\ b_n = \frac{1}{n} \end{matrix}\right.$ ולפי מבחן השורש $\left.\begin{matrix} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1 \\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1 \end{matrix}\right)$

הוכחה

נניח למשל $c < 1$ נבחר $\varepsilon > 0$ כך ש - $q = c + \varepsilon < 1$ אזי קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$c - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < c + \varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$$

ומהתרגיל הקודם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

תרגיל 1

נתון $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ מה מהבאים נכון?

א. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$

ב. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

ג. $\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = 0$

תרגיל 2

נתון $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ מה מהבאים נכון?

א. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

נכון, היות ו - $a_n \to 1$ לכן קיים Nכך שלכל $n > N$ מתקיים $0.5 < a_n < 1.5$ ולכן

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{0.5} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{1.5} \rightarrow 1$$

לכן מסנדוויץ' הטענה נכונה

ב. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

נכון, $a_n \to 1$ וגם $a_{n+1} \to 1$ ולכן מאריתמטיקה $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

ג. $\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = 1$ הטענה לא נכונה, דוג' נגדית $a_n = \sqrt[n]{2}$

תרגיל

חשבו $\lim_{n\to\infty} \frac{6^n}{n!}$

פתרון

כאשר יש עצרת נשתמש בדר"כ במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{6^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{6^n}{n!}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{6}{n+1}\right) \to 0$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} \frac{6^n}{n!} = 0$.

מבחן השורש

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ונניח שקיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right) = L$ אזי :

- אם $L > 1$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
- אם $L < 1$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- אם $L = 1$ לא ניתן לקבוע $\left(\begin{matrix} \sqrt[n]{a_n} = 1 \\ \sqrt[n]{b_n} = 1 \end{matrix}\right)$ ולפי מבחן השורש $\left(\begin{matrix} a_n = 1 \\ b_n = \frac{1}{n} \end{matrix}\right.$

הוכחה דומה למבחן המנה

דוגמאות למקרים בהם המבחנים נותנים 1

א.

$$a_n = n \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

למרות ש -

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

ב.

$$b_n = \frac{1}{n} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

למרות ש -

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

ג.

$$c_n = 3 + \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 3$$

למרות ש -

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n+1}}{3+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n+4}{n+1}}{\frac{3n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)n}{(n+1)(3n+1)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n}{3n^2+4n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$$

ד.

$$d_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \text{אין גבול}$$

כי עבור הזוגיים הסדרה שואפת ל - e ובאי זוגיים היא שואפת ל - $\frac{1}{e}$.

למרות ש -

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{d_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{(-1)^n}{n} = 1$$

תרגיל

מה גדול יותר כאשר $n \to \infty$, $2^n, n^{1000}$?

פתרון

נגדיר את הסדרה החיובית הבאה:

$$a_n = \frac{n^{1000}}{2^n}$$

ע״פ מבחן השורש

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^{1000}}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ז"א שעבור n מספיק גדול מתקיים

$$\frac{n^{1000}}{2^n} < 1 \quad \rightarrow \quad n^{1000} < 2^n$$

סימון

עבור $0 < a_n, b_n$ כאשר $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$ נרשום $a_n = o(b_n)$ ז"א a_n שואפת לאפס יותר בקצב מהיר ביחס לסדרה b_n. סימון נוסף $a_n \ll b_n$ כאשר $n \to \infty$.

דוג' נוספות (הוכחה באותה דרך)

$$\ln(\ln n) \ll \ln n \ll n \ll n^2 \ll \cdots \ll 2^n \ll 3^n \ll \cdots n! \ll n^n$$

סדרות מונוטוניות

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה, נאמר ש - a_n מונוטונית עולה אם מתקיים $a_n \le a_{n+1}$ לכל n.

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה, נאמר ש - a_n מונוטונית עולה ממש אם מתקיים $a_n < a_{n+1}$ לכל n.

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה, נאמר ש - a_n מונוטונית יורדת אם מתקיים $a_n \ge a_{n+1}$ לכל n.

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה, נאמר ש - a_n מונוטונית עולה אם מתקיים $a_n > a_{n+1}$ לכל n.

משפט

אם a_n סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אז קיים גבול סופי לסדרה והוא הסופרימום שלה.

אם a_n סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע אז קיים גבול סופי לסדרה והוא האינפימום שלה.

תרגילים

1. נתונה הסדרה $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{{a_n}^2 + 12} \end{cases}$ הראו שהסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

פתרון

<u>שלב א</u> נראה באינדוקציה ש - a_n סדרה חסומה מלעיל ע"י 2.

בסיס: $a_1 = 0 < 2$

הנחה: $a_n < 2$

צעד: $a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{{a_n}^2 + 12} < \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$

לסיכום: הוכחנו כי $a_n < 2$ לכל n.

<u>שלב ב</u> נוכיח באינדוקציה שהסדרה מונוטונית עולה:

בסיס: $0 = a_1 < \frac{1}{2}\sqrt{0 + 12} = a_2$

הנחה: $a_n \geq a_{n-1}$

צעד: $a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{{a_n}^2 + 12} > \frac{1}{2}\sqrt{{a_{n-1}}^2 + 12} = a_n$

לסיכום: הוכחנו שהסדרה מונוטונית עולה.

דרך נוספת (לא באינדוקציה) להראות שהסדרה מונוטונית עולה:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{{a_n}^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{{a_n}^2 + 3 \cdot 2^2} > \frac{1}{2}\sqrt{{a_n}^2 + 3 \cdot {a_n}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4{a_n}^2} = a_n$$

שלב ג הראנו שהסדרה הנתונה מונוטונית עולה וחסומה ולכן לפי המשפט מתכנסת לגבול, נסמנו ב – L.

לפי הנתון :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{{a_n}^2 + 12}$$

נשאיף את n משני הצדדים לאינסוף ונקבל :

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 + 12}$$

$$4L^2 = L^2 + 12 \quad \rightarrow \quad L_{1,2} = \pm 2$$

היות והסדרה שלנו חיובית נבחר $L = 2$.

2. נתונה הסדרה $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{3a_n} \end{cases}$ הראו שהסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

פתרון

3. . נתונה הסדרה $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$, $a_1 = 0$, $0 < c$ האם קיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ מהו?

פתרון

4. נתונה הסדרה $\begin{cases} a_1 = a > 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \end{cases}$ הראו שהסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

פתרון

אינדוקציה לא תעבוד כאן כי כאשר a_n עולה אז $\frac{1}{a_n}$ יורד ו - a_{n+1} הוגדר כסכום של שניהם.

לכן נעשה את השלבים :

<u>שלב 1</u> נוודא ש - $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חיובית ונגדיר $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

<u>שלב 2</u> $\begin{cases} b_n \geq 1 \quad \leftrightarrow \text{עולה } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \\ b_n \leq 1 \quad \leftrightarrow \text{יורדת } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \end{cases}$

<u>שלב 3</u> נמצא חסם כלשהו מלעיל או מלרע

<u>שלב 4</u> נשתמש במשפט ונמצא את הגבול ע״י השאפה של שני הצדדים לאינסוף.

בתרגיל שלנו

<u>שלב 1</u> נגדיר $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)}{a_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{{a_n}^2}\right)$

<u>שלב 2</u> $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ עולה אמ״מ $b_n \geq 1$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{{a_n}^2}\right) \geq 1$$

$$1 + \frac{1}{{a_n}^2} \geq 2$$

$$\frac{1}{{a_n}^2} \geq 1$$

$${a_n}^2 \le 1$$

$$-1 \le a_n \le 1$$

ז״א עבור $-1 \le a_n \le 1 \quad \leftrightarrow \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

בצורה דומה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יורדת אמ״מ $a_n \ge 1$ או $\cancel{a_n \le -1}$ (הסדרה חיובית).

<u>שלב 3</u> נשתמש באי שוויון הממוצעים

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \ge \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1$$

כלומר החל מ a_2 הסדרה יורדת. בנוסף ראינו שלכל $n \ge 2$ מתקיים $a_n \ge 1$ ולכן $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע ע״י 1.

לפי המשפט סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע מתכנסת לאינפימום שלה (לאו דווקא 1).

<u>שלב 4</u> נמצא את הגבול (נסמנו ב L)

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$$

נשאיף לאינסוף ונקבל

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$$

$$2L = L + \frac{1}{L}$$

$$L = \frac{1}{L} \quad \to \quad L = \pm 1$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חיובית ולכן $L = 1$.

תרגיל 5

נתונה סדרה של מספרים חיוביים $\begin{cases} a_1 \geq 1 \\ {a_{n+1}}^2 = 3a_n - 2 \end{cases}$ הראו שהסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

פתרון

<u>שלב א</u> נמצא תנאי על a_1 כך שהיא מונוטונית וחסומה.

נבדוק מתי היא עולה, ז"א $a_{n+1} \geq a_n$ כיוון שהסדרה חיובית לכן ${a_{n+1}}^2 \geq {a_n}^2$

מהגדרת הסדרה $3a_n - 2 \geq {a_n}^2$ ומכאן $0 \geq {a_n}^2 - 3a_n + 2$ לסיכום

אם $1 < a_n < 2$ הסדרה עולה

אם $a_n = 1,2$ הסדרה קבועה

אם $1 > a_n or\ a_n > 2$ הסדרה יורדת

לכם אם $a_1 = 1,2$ הסדרה קבועה

נראה שאם $1 < a_n < 2$ אז גם a_{n+1} מקיים תנאי זה. כנ"ל עובר מצב 3

$$1 < a_n < 2$$

$$3 < 3a_n < 6$$

$$1 < 3a_n - 2 < 4$$

$$1 < {a_{n+1}}^2 < 4$$

$$1 < a_{n+1} < 2$$

ולכן אם $1 < a_1 < 2$ אז $a_2 \geq a_1$ וגם $1 < a_2 < 2$ ובאינדוקציה לכל n מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$ וגם $1 < a_{n+1} < 2$ ז"א הסדרה עולה וחסומה. לכן ע"פ משפט קיים לה גבול, נסמנו ב – L ונמצא את ערכו

$${a_{n+1}}^2 = 3a_n - 2$$

$$L^2 = 3L - 2$$

$$L^2 - 3L + 2 = 0$$

$$L = 2,1$$

כיוון ש $1 < a_1$ לכן $L = 2$.

ממה שראינו עבור תנאי 1 נובע שגם מצב 3 נשאר קבוע, ז"א אם $a_1 > 2$ הסדרה יורדת, נראה שהיא חסומה מלמטה.

$$a_n > 2$$

$$3a_n - 2 > 4$$

$${a_{n+1}}^2 > 4$$

$$a_{n+1} > 2$$

לכן אם $a_1 > 2$ הסדרה מונוטונית יורדת ו - $a_n > 2$ לכל n ולכן היא מתכנסת וגם כאן נקבל $L = 2$.

לסיכום

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 2 & 1 < a_1 \\ 1 & 1 = a_1 \end{cases}$$

תתי סדרות

$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ היא תת סדרה של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

ז"א $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה עם אברים מ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$

טענה

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נניח כי $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ ו - $\{a_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות לאותו גבול L אזי הגבול של הסדרה המקורית הוא גם L.

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$ צ״ל N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$

נתון $a_{2n} \to L$ כלומר קיים N_{even} טבעי כך שלכל $n > N_{even}$ זוגי , מתקיים $|a_{2n} - L| < \varepsilon$

נתון $a_{2n+1} \to L$ כלומר קיים N_{odd} טבעי כך שלכל $n > N_{odd}$ אי זוגי , מתקיים $|a_{2n++1} - L| < \varepsilon$

נבחר $N = max\,\{N_{even}, N_{odd}\}$ ואז לכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

הערות

הטענה נכונה עבור מס׳ סופי של תתי סדרות.

הכיוון ההפוך גם נכון. אם $a_n \to L$ אז כל תת סדרה שלה גם מתכנסת לאותו גבול.

תרגיל

תהי a_n סדרה עולה, עם תת סדרה a_{n_k} אשר $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$ הוכיחו שגם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

פתרון

נראה שהסדרה a_n מתכנסת וגבולה הוא L.

כיון שנתון ש - a_n עולה, מספיק שהראה שהיא חסומה מלעיל. נוכיח כי L הוא הסופרימום שלה.

נניח בשלילה שקיים N טבעי כך שעבורו $a_N > L$. נבחר k_0 כך ש - $n_{k_0} > N$ ואז היות והסדרה עולה , לכן מתקיים

$$a_{n_{k_0}} > a_N > L$$

בסתירה לנתון שתת הסדרה a_{n_k} חסומה ע״י L. ולכן הסדרה a_n חסומה מלעיל ע״י L. ולכן קיים לה גבול $\lim_{n\to\infty} a_n = \tilde{L}$. ברור כי $\tilde{L} \le L$ (כי אחרת שוב נראה שתת הסדרה לא חסומה ע״י L).

אם גבול הסדרה הוא $\tilde{L}$ אז גם כל תת סדרה שלה מתכנסת ל - $\tilde{L}$ (לפי משפט), ומיחידות הגבול נקבל $\tilde{L} = L$.

הגדרה

מספר λ יקרא גבול חלקי של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם קיימת תת סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל - λ.

הגדרה

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה, נגדיר

$$\lim\ sup\ a_n = sup\ \{\lambda: \lambda \text{ גבול חלקי של } a_n\}$$

$$\lim\ inf\ a_n = inf\ \{\lambda: \lambda \text{ גבול חלקי של } a_n\}$$

סימון נוסף:

$$lim\,sup\,a_n = \overline{lim}\ a_n\ ,\quad lim\,inf\,a_n = \underline{lim}\,a_n$$

תרגיל

תהי $a_n = \frac{(-1)^n+1}{2} + cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ מצאו את כל הגבולות החלקיים של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. מהם $\underline{lim}\,a_n, \overline{lim}\ a_n$?

פתרון

משפט בולצאנו ויישטראס

לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת (במובן הרחב).

בפרט אם הסדרה חסומה יש לה תת סדרה מתכנסת לגבול סופי. אם הסדרה לא חסומה יש לה תת סדרה המתכנסת לגבול אינסופי.

משפט

אם כל תת הסדרות מתכנסות לאותו גבול , הסדרה תתכנס לאותו גבול.

הגבול e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

הערות

הסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה ממש וחסומה מלעיל ע"י 3 ולכן מתכנסת לגבול שנסמנו ב - e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$$

לכל $x\in R$ ולכל סדרה ממשית a_n כאשר $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n}=e^x$

תרגילים

1. חשבו $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2-2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2+3}{n^2-2}\right)^{n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2-2}\right)^{n^2-2}$$

לכל $n\geq 2$ מתקיים $n^2-2\in\mathbb{N}$ ולכן a_n היא תת סדרה של $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{m}\right)^m=e^3$ ולכן גם $\lim_{n\to\infty}a_n=e^3$.

.2

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4n-5}{3n^2-7n+9}\right)^n =$$

3. האם הסדרה $a_n = \begin{cases} \left(\frac{n^2+5}{n^2+4}\right)^{-n^2} & \text{זוגי } n \\ \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} & \text{אי זוגי } n \end{cases}$ מתכנסת, א״כ מה גבולה?

פתרון

4. האם הסדרה $a_n = \begin{cases} \left(1-\frac{1}{n^3+1}\right)^{n^3} & \text{זוגי } n \\ \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} & \text{אי זוגי } n \end{cases}$ מתכנסת, א״כ מה גבולה?

פתרון

.5

הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$

פתרון

משתמש באינדוקציה

בסיס: $n = 1$ נקבל $\frac{1}{e} < 1$

צעד: נניח $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$ ונוכיח עבור $n+1$:

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{e}\left(\frac{n+1}{e}\right)^n = \frac{n+1}{e}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \frac{n+1}{e}\cdot n!\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

הסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה ממש ל- e ולכן לכל n מתקיים $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ ומכאן

$$< \frac{n+1}{e}\cdot n!\cdot e = (n+1)!$$

הערה

הראנו בעבר כי $\left(\frac{n}{2}\right)^n < n!$ עבור $n \geq 6$ ולכן עכשיו נוכל לומר כי עבור כל $n \geq 6$ מתקיים

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

או

$$\frac{n}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n}{2}$$

.6

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = ?$$

פתרון

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{n}$$

כיוון ש - $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$ לכן קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

ולכן

$$2^n<\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

מכיוון ש - $2^n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ לכן גם $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\infty$.

הערה : נשים לב ש - $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$ ולכן לא נוכל להחליף את $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{n}$ ב- e^n.

.7

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

כיוון ש - $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}=\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

ז"א הביטוי מתנהג כמו $\sqrt[n]{e}$ ולכן ישאף ל -1.

גם פה לא נעשה השאפה בחלקים.

כיוון ש - $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=e$ לכן קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$\frac{1}{2}e < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < \frac{3}{2}e$$

נוציא שורש ממעלה – n

$$1 \xleftarrow[n\to\infty]{} \sqrt[n]{\frac{1}{2}e}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{\frac{3}{2}e} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

הקצות שואפים ל – 1 לכן מסנדוויץ' הגבול שווה 1.

.8

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n-5}{3n^2-7n+9}\right)^n$$

כיוון ש - $\frac{n^2+4n-5}{3n^2-7n+9} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$ לכן הגבול הנ"ל הוא מהצורה $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ולכן שואף ל – 0.

לכל n מספיק גדול מתקיים

$$0 < \left(\frac{n^2+4n-5}{3n^2-7n+9}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

לכן מסנדוויץ' הגבול שווה 0.

דרך נוספת: מבחן השורש.

תנו דוגמה ל:

- סדרת מספרים רציונליים המתכנסת למספר אי רציונלי: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \frac{\pi[10^n]}{10^n}$
- סדרת מספרים רציונליים המתכנסת למספר רציונלי: $2, 1+\frac{1}{n}$
- סדרת מספרים אי רציונליים המתכנסת למספר רציונלי: $1+\frac{\sqrt{2}}{n}$

- סדרת מספרים רציונליים המתכנסת למספר אי רציונלי: $\sqrt{2}+\frac{1}{n}$
- סדרת חסומה שאינה מתכנסת : $cos\,(n), (-1)^n$
- סדרת מתכנסת שאינה מונוטונית : $\frac{(-1)^n}{n}, \frac{sin\,(n)}{n}$

סדרות של ממוצעים

אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה וקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n} = L$ (המשפט נכון גם אם $L=\infty$).

הוכחה עבור גבול סופי

נפריד לשלושה מקרים

מקרה א $L=0$

כלומר נתון $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ צ"ל $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n} = 0$

יהי $\varepsilon>0$, נמצא N כך שלכל $n>N$ יתקיים

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}-0\right|<\varepsilon$$

מהנתון $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ נובע שקיים N_0 טבעי כך שלכל $n>N_0$ מתקיים $|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$.

יהי $n>N_0$ מתקיים

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_0}+a_{N_0+1}+\cdots+a_n}{n}\right| \le$$

$$\frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{N_0}|+|a_{N_0+1}|+\cdots+|a_n|}{n} =$$

$$\frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{N_0}|}{n}+\frac{|a_{N_0+1}|+\cdots+|a_n|}{n}<\frac{C}{n}+\frac{n\frac{\varepsilon}{2}}{n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

הביטוי הראשון הוא מספר סופי של מחוברים ולכן הוא קבוע לכן קיים $N_0 < N$ כך שלכל $N <$

n יתקיים שהביטוי קטן מ - $\frac{\varepsilon}{2}$, בביטוי השני יש פחות מ- n מחוברים במונה.

מקרה ב L סופי שונה מאפס

נגדיר סדרה חדשה $b_n = a_n - L$ מתקיים $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ולכן לפי מה שהראנו במקרה א מתקיים

שסדרת הממוצעים של b_n שואפת לאפס, כלומר :

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots b_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1-L)+(a_2-L)+\cdots(a_n-L)}{n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}-L\right)$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}=L$$

מקרה ג הגבול הוא אינסופי (פלוס או מינוס)

יהי $M > 0$ צריך להראות שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n} > M$

מהנתון $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ נובע שקיים N_0 טבעי כך שלכל $n > N_0$ מתקיים $a_n > M$. ומכאן מועד

דומה למקרה א׳.

הערה

הכיוון ההפוך של המשפט לא נכון, ז״א שאם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n} = L$ לא בהכרח $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

דוג׳ לסדרה $a_n = (-1)^n$ אין גבול אבל $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$.

מסקנה

אם $0 < a_n$ וקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$ אזי גם סדרת הממוצעים ההנדסיים

$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$ מתכנסת ל $L -$.

הוכחה

מאי שוויון הממוצעים

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}$$

נגדיר את הסדרות

$$b_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}, \qquad c_n = \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{b_n}$$

מכיוון ש $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{L}$ לכן $c_n \to \frac{1}{L}$ ומכאן $b_n = \frac{1}{c_n} \to L$

לכן הגבול בצדדים שואפים לאותו מספר וממשפט הסנדוויץ' נקבל שגם הממוצע הגאומטרי שואף לאותו מספר.

דוג'

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \infty$$

תרגיל.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}=?$$

כדי לחשב את גבול הסדרה מהצורה : $a_n=\sqrt[n]{b_n}$ נשתמש במשפט הבא

משפט

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית אם $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=L$ אז גם $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)=L$

הוכחה

נגדיר $b_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}$ כאשר נחליט $a_0=1$ כדי שהסדרה תהיה מוגדרת היטב.

ואז

$$b_1=\frac{a_1}{1},b_2=\frac{a_2}{a_1},b_3=\frac{a_3}{a_2},\dots$$

מהנתון נובע

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=L$$

לכן גם סדרת הממוצעים הגאומטריים של b_n שואפת ל - L. ומכאן :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_1}{1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{b_1\cdot b_2\cdots b_n}\right)\underset{n\to\infty}{=\rightarrow}L$$

הערה : הכיוון ההפוך לא בהכרח נכון. למשל הסדרה ... ,1,2,1,2 קיים גבול לשורש ולא למנה.

במבחן המנה משתמשים בגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$ לקבל מידע על גבול הסדרה a_n , כאן מקבלים מידע על הגבול של $\sqrt[n]{a_n}$.

מבחן השורש מספק מידע שנקבל ממבחן המנה אבל לא להיפך.

תרגילים

1. הוכיחו $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{c\cdot n}\right) = 1$ כאשר $0 < c \in \mathbb{R}$ [מקרה פרטי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$].

פתרון

נגדיר סדרה $a_n = c\cdot n$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{c(n+1)}{cn} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

לכן לפי המשפט קיים הגבול של $\sqrt[n]{a_n}$ והוא גם שווה ל -1.

2. חשבו את הגבול של $a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.

פתרון

.3

יהי $a > 1$ הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[2^n]{a} - 1} = \frac{1}{2}$

פתרון

נגדיר את הסדרה $a_n = \sqrt[2^n]{a} - 1$, זאת סדרה חיובית כי נתון $a > 1$, נחשב

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2^{n+1}]{a} - 1}{\sqrt[2^n]{a} - 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2^{n+1}]{a} - 1}{\sqrt[2^n]{a} - 1}\cdot\frac{\sqrt[2^{n+1}]{a} + 1}{\sqrt[2^{n+1}]{a} + 1} =$$

נכפול בצמוד של המונה

נחשב את המונה (ע״פ נוסחת כפל מקוצר)

$$\left(\sqrt[2^{n+1}]{a} - 1\right)\cdot\left(\sqrt[2^{n+1}]{a} - 1\right) = \left[\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}\right)^2 - 1^2\right] = a^{\frac{2}{2^{n+1}}} - 1 = a^{\frac{1}{2^n}} - 1 = \sqrt[2^n]{a} - 1$$

נחזור לתרגיל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2^{n+1}]{a} - 1}{\sqrt[2^n]{a} - 1}\cdot\frac{\sqrt[2^{n+1}]{a} + 1}{\sqrt[2^{n+1}]{a} + 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2^n]{a} - 1}{\left(\sqrt[2^n]{a} - 1\right)\left(\sqrt[2^{n+1}]{a} + 1\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[2^{n+1}]{a} + 1\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

ולכן ע״פ המשפט גם $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[2^n]{a} - 1} = \frac{1}{2}$

.4

נתונות הסדרות

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$

$$b_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$$

א. הוכיחו כי לכל n מתקיים $\frac{1}{2\sqrt{n}} \le a_n < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

ב. הסיקו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ וגם $\lim_{n\to\infty} b = 0$

פתרון

א. הוכחה באינדוקציה.

אנחנו נוכיח טענה נוספת באינדוקציה

לכל n מתקיים

$$\underbrace{\frac{4^n}{2\sqrt{n}}}_{x_n} \le \underbrace{\binom{2n}{n}}_{y_n} < \underbrace{\frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}}_{z_n}$$

בסיס : עבור $n = 1$ נקבל שוויון

$$\frac{4}{2} \le \binom{2}{1} = 2 < \frac{4}{\sqrt{4}}$$

צעד : נניח שהטענה נכונה עבור n ונראה שהיא נכונה עבור $n + 1$

נראה שהטענה הבאה נכונה

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \le \frac{y_{n+1}}{y_n} \le \frac{z_{n+1}}{z_n}$$

כי אם נכפול אותה ב $-x_n \le y_n \le z_n$

נקבל $x_{n+1} \le y_{n+1} \le z_{n+1}$ שאותה רצינו להוכיח

אגף שמאלי

$$\frac{\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}}{\frac{4^n}{2\sqrt{n}}} \le \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}$$

$$\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \le \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \le \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \le \frac{2n+1}{n+1}$$

$$2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \le 2n+1$$

$$4n(n+1) \le (2n+1)^2$$

$$0 \le 1$$

אגף ימין

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \le \frac{\frac{4^{n+1}}{\sqrt{3n+4}}}{\frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}}$$

$$\frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} \le \frac{4\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}}$$

$$\frac{2n+1}{n+1} \le \frac{2\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}}$$

$$(2n+1)\sqrt{3n+4} \le 2(n+1)\sqrt{3n+1}$$

$$(2n+1)^2(3n+4) \le 4(n+1)^2(3n+1)$$

$$12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \le 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4$$

$$0 \leq n$$

נשים לב

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2n)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)^2} = \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)][2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)]}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)^2} =$$

כדי לייצר זוגיים גם במכנה – נכפול ב –

$$\frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)][2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)]}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)^2} \cdot \frac{4^n}{(2^n)^2} =$$

$$\frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)][2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)] \cdot 4^n}{[(1 \cdot 2)(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdots (2 \cdot n)]^2} =$$

$$\frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)][2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)] \cdot 4^n}{[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)]^2} =$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot 4^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = 4^n \cdot a_n$$

ז"א

$$\binom{2n}{n} = 4^n \cdot a_n$$

הוכחנו מקודם

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$$

נחלק ב - 4^n ונקבל

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

ב.

נחשב את הגבול של הביטוי שקיבלנו בסעיף א' ונקבל מסנדוויץ'

$$0 \xleftarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2\sqrt{n}} \le a_n \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

הקשר בין שתי הסדרות הוא

$$b_n = \frac{1}{a_n(2n+1)}$$

ולכן אם ראינו בסעיף א' שמתקיים

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \le a_n \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

$$2\sqrt{n} \ge \frac{1}{a_n} \ge \sqrt{3n+1}$$

$$\frac{2\sqrt{n}}{2n+1} \ge \frac{1}{a_n(2n+1)} \ge \frac{\sqrt{3n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{2\sqrt{n}}{2n+1} \ge b_n \ge \frac{\sqrt{3n+1}}{2n+1}$$

נקבל מסנדוויץ'

$$0 \xleftarrow[n\to\infty]{} \frac{2\sqrt{n}}{2n+1} \ge b_n \ge \frac{\sqrt{3n+1}}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

שאלות ממבחנים

.1

נתונה הסדרה

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{3}{2} \\ a_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{a_n} \quad n = 1,2\cdots \end{cases}$$

מהי הטענה הנכונה?

א. הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$ קיים וגדול מ - $\frac{3}{2}$

ב. הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$ קיים וקטן או שווה ל - $\frac{3}{2}$

ג. הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$ אינו קיים אך קיים במובן הרחב.

ד. הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$ אינו קיים במובן הרחב.

.2

תהי a_n סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n^4 = 1$. מהי הטענה הנכונה?

א. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ או $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$

ב. $\lim_{n\to\infty} a_n^{4n} = 1$

ג. תהי b_n סדרה חסומה. לסדרה $a_n(b_n^4 - 1)$ יש תת סדרה מתכנסת לגבול סופי.

ד. תהי b_n סדרה כך ש - לסדרה $\lim_{n\to\infty} b_n(a_n^4 - 1) = 0$ אז ל - b_n יש תת סדרה מתכנסת לגבול סופי.

ה. תהי $f: R \to R$ פונקציה רציפה, אז $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(1)$.

פתרון

.3

תהי a_n סדרה המוגדרת ע״י

$$\begin{cases} a_1 = c > 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n^2 + 6) \quad n = 1,2 \cdots \end{cases}$$

מהי הטענה הנכונה?

א. הסדרה a_n מתכנסת לגבול סופי לכל $c > 0$.

ב. הסדרה a_n חסומה, אך איננה מתכנסת לכל $c > 0$.

ג. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ לכל $c > 0$.

ד. קיימים ערכי $c > 0$ עבורם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ וקיימים ערכי $c > 0$ עבורם $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

ה. קיימים ערכי $c > 0$ עבורם הסדרה מתכנסת לגבול סופי וקיימים ערכי $c > 0$ עבורם הסדרה שואפת לגבול אינסופי.

פתרון

.4

יהיו a_n, b_n סדרות כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ אז לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$|a_n - b_n| < \varepsilon$$

הטענה איננה נכונה

.5

נתונה סדרה חסומה a_n , מהי הטענה הנכונה

א. אם $1 < a_n < 2$ אז $\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} sup\ a_n}$

ב. לכל סדרה חסומה b_n מתקיים $\lim_{n\to\infty} sup(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} sup a_n + \lim_{n\to\infty} sup b_n$

ג. אם $1 < a_n < 2$ אז $\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} inf\ a_n}$

ד. לכל סדרה חסומה b_n מתקיים $\lim_{n\to\infty} sup(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} sup a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} sup b_n\right)$

פתרון

.6

חשבו

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right)$$

פתרון

.7

חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$$

פתרון

.8

יהיו a_n, b_n סדרות כך שמתקיים $|a_n - b_n| = 1$. אם a_n מתכנסת אז גם b_n מתכנסת.

הטענה איננה נכונה

$$a_n = 0, b_n = (-1)^n$$

.9

תהי a_n סדרה. a_n היא סדרה קבועה, אמ״מ לכל $\varepsilon > 0$ ולכל N ולכל $n > N$ טבעי מתקיים

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

הטענה נכונה

.10

תהי a_n סדרה. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אמ״מ קיים $L \in R$ כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$L - 1 < a_n < L + \varepsilon$$

הטענה לא נכונה

.11

בדקו האם קיים גבול במובן הרחב

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(-\pi n)^n}$$

פתרון

.12

בדקו האם קיים גבול במובן הרחב

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$$

פתרון

.13

תהי a_n סדרה אי שלילית ויהי $L > 0$. הוכיחו לפי הגדרה אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אז

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

פתרון

שאלות חזרה

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\sqrt{n^4 + n} - \sqrt{n^4}\right)$$

.2 a מספר חיובי כלשהו.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{[n^2 a]}$$

3. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית אזי $\{cos(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

4. אם $a_n + 3b_n$ וגם $2a_n + b_n$ מתכנסות לגבול (סופי), אז בהכרח גם הסדרות a_n, b_n מתכנסות לגבול (סופי).

5. אם הסדרה a_n^2 וגם הסדרה $|a_n|$ מתכנסות במובן הרחב, אז בהכרח גם הסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב.

6. נתונה הסדרה המוגדרת האופן הבא: $a_{n+1}=\sqrt{2a_n-1}$, $a_1=2$.

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

גבולות עם e

1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,sin\,(\sqrt{n})}{(n+1)^n}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\,cos(\pi n)}{(n+1)^{n+1}}(n+3)$$

3. האם הטענה הבאה נכונה?

$$\lim_{n\to\infty}\left(cos\left(\frac{1}{n}\right)-sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=\frac{1}{e}$$

שאלות נוספות לחזרה

1. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות של מספרים כך ש

א. הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה ממש. ב. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=2016$.

אזי הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

2. כמה גבולות החלקיים יש לסדרה $a_n=(-1)^n\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$?

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 4

ה. 6

3. אם שני הגבולות $\lim_{n\to\infty}|a_n+b_n|$, $\lim_{n\to\infty}a_n$ קיימים וסופיים אזי גם הגבול $\lim_{n\to\infty}b_n$ קיים וסופי.

4. תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות , כאשר $b_n \neq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

אם הסדרה $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וגם הסדרה $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת

אזי בהכרח גם הסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות.

5. אם $0 \le a_n \le a_{n+1} \le 1$ לכל n, אזי בהכרח $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

עוד שאלות חזרה

1. חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right)=$$

2. חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2015}-1\right)[\sin n]$$

א. 0 ב. 2 ג. 1 ד. לא קיים ה.

הערה: $[x]$ הוא הערך השלם של x

3. חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}$$

א. 0 ב. 2 ג. 1 ד. לא קיים ה. ∞

4. חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+2n^2+3}-\sqrt{n^3+n^2+4}}{\sqrt{4n+5}-\sqrt{3n+4}}$$

א. 0 ב. $-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ג. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד. לא קיים ה. ∞

5. חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} tan(2+(-1)^n)$$

א. $\frac{1}{e}$ ב. e ג. 0 ד. לא קיים ה. ∞

6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2}$$

א. 0 ב. 2 ג. 1 ד. לא קיים ה. ∞

שאלות חזרה – סדרה רקורסיבית

1.

נתונה סדרה המוגדרת באופן רקורסיבי:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \quad (n = 1,2,3, \dots)$$

א. הוכיחו כי הסדרה הנתונה מונוטונית עולה ממש.

ב. הוכיחו תוך שימוש בעקרון האינדוקציה המתמטית כי לכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $a_n < 2$.

ג. הסבירו מדוע לסדרה הנתונה קיים גבול ומצאו אותו.

.2

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3} \quad (n = 1,2,3, \dots)$$

א. הוכיחו תוך שימוש בעקרון האינדוקציה המתמטית כי הסדרה הנתונה מונוטונית עולה ממש.

ב. הוכיחו תוך שימוש בעקרון האינדוקציה המתמטית כי הסדרה הנתונה חסומה.

ג. הסבירו מדוע לסדרה הנתונה קיים גבול (צטטו את המשפטים בהם השתמשתם בהוכחה) ומצאו אותו.

.3

הוכיחו כי לסדרה הנתונה קיים גבול ומצאו אותו.

$$a_1 = 7, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1,2,3, \dots)$$

גבולות עם e

.1

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}+\frac{1}{5n^2}\right)^n$$

א. 1 ב. 0 ג. $e^{\frac{1}{5}}$ ד. $e^{\frac{1}{3}}$ ה. e^{15}

.2

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$$

א. $e^{-\frac{1}{2}}$ ב. e^3 ג. 1 ד. לא קיים ה. ∞