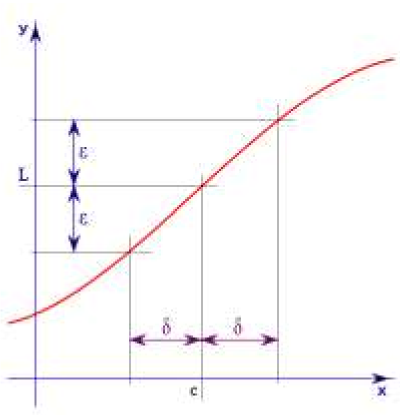
גבולות של פונקציות

המטרה שלכל ערך של ε המגביל את התנועה בציר ה $y-$ נתאים ערך של δ שיגביל את התנועה

בציר ה $x-$ (כך שנשאר בטווח של ε).

כל עוד $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ אולי חוץ מ x_0 עצמו נקבל $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$



הגדרה נאמר כי $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים

$0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.

הערות

- $0 < |x - x_0|$ משמעותו ש $x \neq x_0$ (סביבה נקובה).
- יש δ כלומר צריך להראות שקיימת δ, לא צריך לבחור ב δ האופטימלית.

שיטה לחישוב גבולות

בהינתן $0 < |x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - L| < \underbrace{\quad}_{\text{הערכות}} < c|x - x_0| < c \cdot \delta \underbrace{=}_{\text{נדרוש}} \varepsilon$$

תרגילים

1. הוכיחו לפי הגדרה $\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-1}=-1$.

פתרון

יהי $\varepsilon>0$ קיימת δ כך ש $0<|x-0|<\delta$ -

$$\left|\frac{x+1}{x-1}-(-1)\right|=\left|\frac{x+1+x-1}{x-1}\right|=\left|\frac{2x}{x-1}\right|=\frac{2|x|}{|x-1|}$$

$0<|x-0|<\delta \;\rightarrow\; -\delta<x<\delta$ נבחר $\delta_1=\frac{1}{2}$ ונקבל:

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \;\rightarrow\; -\frac{1}{2}-1<x-1<\frac{1}{2}-1 \;\rightarrow\; -\frac{3}{2}<x-1<-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}<|x-1|<\frac{3}{2}$$

נחזור לגבול ונקטין את המכנה:

$$\frac{2|x|}{|x-1|}<\frac{2|x|}{\frac{1}{2}}=4|x|=4\delta\underbrace{=}_{\text{נדרוש}}\varepsilon$$

נבחר $\delta_2=\frac{\varepsilon}{4}$.

לכן עבור $\delta=min\left\{\frac{\varepsilon}{4},\frac{1}{2}\right\}$ נקבל את הנדרש.

2. הוכיחו לפי הגדרה $\lim_{x\to 1}(2x+1)=3$.

פתרון

יהי $\varepsilon>0$ קיימת δ כך ש $0<|x-1|<\delta$

$$|2x+1-3|=|2x-2|=2|x-1|<2\delta\underbrace{=}_{\text{נדרוש}}\varepsilon$$

נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ אזי אם $0 < |x-1| < \delta$ נקבל $|2x+1-3| = 2|x-1| < 2\delta = \varepsilon$.

3. הוכיחו לפי הגדרה $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

פתרון

תרגיל 3*

נתון $\lim_{x\to b} f(x) = L$

א. יהי $a \neq 0$ הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{x\to 0} f(ax+b) = L$

ב. האם הטענה נכונה עבור $a = 0$?

פתרון

א.

יהי $\varepsilon > 0$ צריך למצוא $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-0| < \delta$ מתקיים $|f(ax+b) - L| < \varepsilon$.

מהנתון בשאלה נובע שקיימת $\delta_1 > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |z-b| < \delta_1$ מתקיים $|f(z) - L| < \varepsilon$.

נסמן $ax+b = z$ ואז מהנתון נקבל

$$0 < |z-b| < \delta_1$$

$$0 < |ax+b-b| < \delta_1$$

$$0 < |ax| < \delta_1$$

$$0 < |a| \cdot |x| < \delta_1 \quad /|a| > 0$$

$$0 < |x| < \frac{\delta_1}{|a|}$$

לכן אם נבחר $\delta = \frac{\delta_1}{|a|}$ נקבל שלכל $0 < |x| < \delta$ יתקבל $|f(ax+b) - L| < \varepsilon$.

ב.

הטענה לא בהכרח נכונה, אם $a = 0$, נסתכל על הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אז $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ אבל $\lim_{x \to 0} f(0 \cdot x + 0) = \lim_{x \to 0} f(0) = 0 \neq 2$.

4. הוכיחו לפי הגדרה $\lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x-1} = -1$.

פתרון

תרגיל 5

הוכיחו לפי הגדרה $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$

פתרון:

תרגיל 5*

הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$. (עבור $a>0$).

פתרון

יהי $\varepsilon>0$ נמצא $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$ יתקיים $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon$.

לכל $x>0$ מתקיים

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|=\frac{\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|\cdot\left|\sqrt{x}+\sqrt{a}\right|}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{a}\right|}=\frac{|x-a|}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{a}\right|}\le\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}\le\frac{\delta}{\sqrt{a}}\underset{\text{נדרוש}}{<}\varepsilon$$

הכפלה בצמוד, נדרוש

לכן נבחר $\delta=\sqrt{a}\varepsilon$.

מצד שני, צריך לדאוג ש - $x>0$ ולכן נדרוש $|x-a|<\delta$

$$-\delta<x-a<\delta$$

$$-\delta<x-a<\delta$$

$$a-\delta<x<a+\delta$$

ולכן נדרוש $0<a-\delta$ ז״א $a<\delta$

לסיכום: $\delta=\min\{\sqrt{a}\varepsilon,a\}$.

תרגיל 6

הוכיחו לפי הגדרה $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2x}{1+sinx}=1$.

פתרון

יהי $\varepsilon>0$ נמצא $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-0|<\delta$ מתקיים $\left|\frac{1-2x}{1+sinx}-1\right|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{1-2x}{1+sinx}-1\right|=\left|\frac{1-2x-1-sinx}{1+sinx}\right|=\left|\frac{-2x-sinx}{1+sinx}\right|=\left|\frac{2x+sinx}{1+sinx}\right|$$
$$\le\frac{2|x|+|sinx|}{|1+sinx|}\le\frac{2|x|+|x|}{|1+sinx|}=\frac{3|x|}{|1+sinx|}<\frac{3\delta}{|1+sinx|}$$

השתמשנו: אי שוויון המשולש, $|sinx|\le|x|$

$$0<|x-0|<\delta\ \ \to\ -\delta<x<\delta$$

נבחר $\delta=\frac{\pi}{3}$ ונקבל:

$$-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}\ \ \to\ -\frac{\sqrt{3}}{2}<sinx<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}<1+sinx<1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}<|1+sinx|<1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ולכן את המכנה נחליף בצד השמאלי כדי להגדיל את ערך הביטוי.

$$\frac{3\delta}{|1+sinx|} \le \frac{3\delta}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \underset{\text{נדרוש}}{<} \varepsilon$$

ז"א $\varepsilon \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \delta$.

לסיכום, נדרוש $\delta = min\left\{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}\varepsilon, \frac{\pi}{3}\right\}$.

סוגי גבולות

x_0 סופי ו - L סופי. למשל $\lim_{x\to 1} f(x)$ כאשר $f(x) = x$.

לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.

הערה: כל התרגילים דלעיל.

x_0 סופי ו - $L = \infty$. למשל $\lim_{x\to 0} f(x)$ כאשר $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

לכל $M > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $f(x) > M$.

$x_0 \to \infty$ ו $L -$ סופי. למשל $\lim_{x\to 0} f(x)$ כאשר $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

לכל $\varepsilon > 0$ יש $M > 0$ כך שלכל x המקיים $x > M$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$x_0 \to \infty$ ו - $L = \infty$. למשל $\lim_{x\to \infty 0} f(x)$ כאשר $f(x) = x^2$.

לכל $M > 0$ יש $x_0 > 0$ כך שלכל x המקיים $x > x_0$ מתקיים $f(x) > M$.

תרגילים

הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

פתרון

לכל $M>0$ ו לכל $x\neq 0$ מתקיים:

$$\frac{1}{x^2}>M \quad\leftrightarrow\quad x^2<\frac{1}{M} \quad\leftrightarrow\quad -\frac{1}{\sqrt{M}}<x<\frac{1}{\sqrt{M}}$$

נבחר $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$

פורמלית: בהינתן $M>0$ נבחר $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$ ואז אם $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $f(x)=\frac{1}{x^2}>M$

הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

פתרון

$$\left|\frac{x^2+3x+1}{3x^2}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{x^2+3x+1-x^2}{3x^2}\right|=\left|\frac{3x+1}{3x^2}\right|$$

עבור $x\geq 1$

$$<\left|\frac{3x+x}{3x^2}\right|=\frac{4x}{3x^2}=\frac{4}{3x}\underset{\text{נדרוש}}{<}\varepsilon$$

נבחר $x_0\geq\frac{4}{3\varepsilon}$. אם נבחר $x_0\geq 1, x_0\geq\frac{4}{3\varepsilon}$ נקבל את הנדרש.

פורמלית

בהינתן $\varepsilon>0$ נבחר $x_0=max\left\{1,\frac{4}{3\varepsilon}\right\}$ כל שאם $x>x_0$ נקבל:

$$\left|\frac{x^2+3x+1}{3x^2}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3x+1}{3x^2}\right|<=\frac{4}{3x}<\frac{4}{3x_0}<\frac{4}{3\,\frac{4}{3\varepsilon}}=\varepsilon$$

תרגיל 1

הוכיחו לפי הגדרה $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$.

פתרון

יהי $\varepsilon>0$ נמצא $x_0>0$ כך שלכל x המקיים $x>x_0$ מתקיים $\left|\frac{x}{e^x}-0\right|<\varepsilon$.

לכל $x>0$ מתקיים

$$\left|\frac{x}{e^x}-0\right|=\frac{x}{e^x}\le\frac{[x]+1}{e^{[x]}}=$$

נגדיל את המונה ונקטין את המכנה

נסתכל על הסדרה $a_n=\frac{n+1}{e^n}$ ממבחן המנה נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{e^{n+1}}}{\frac{n+1}{e^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\cdot\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{e}<1$$

ולכן גבול הסדרה שואף לאפס. לכן קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$|a_n|=\left|\frac{n+1}{e^n}\right|<\varepsilon$$

לכן נבחר $x_0=N+1$ ואז לכל $x>x_0$, מתקיים $[x]>N$ ואז

$$\left|\frac{x}{e^x}-0\right|=\frac{x}{e^x}\le\frac{[x]+1}{e^{[x]}}<\varepsilon$$

הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{x\to-\infty0}x^2=\infty$.

תהי $M>0$ צ"ל שקיים ו ל $x_0<0$ כך שלכל $x<x_0$ מתקיים $f(x)>M$.

$$f(x)=x^2>M\ \leftrightarrow |x|>\sqrt{M}\ \leftrightarrow\ -\sqrt{M}<x \text{ או } x>\sqrt{M}$$

נבחר $x < -\sqrt{M}$ ונקבל את הנדרש.

פורמלית: בהינתן $M > 0$ נבחר $x_0 = -\sqrt{M}$ אזי כל $x < x_0$ מתקיים $f(x) = x^2 > M$.

גבולות חד צדדיים

נאמר כי $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ (x שואף ל x_0 מימין) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < x - x_0 < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.

בצורה דומה, נאמר כי $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ (x שואף ל x_0 משמאל) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < x_0 - x < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.

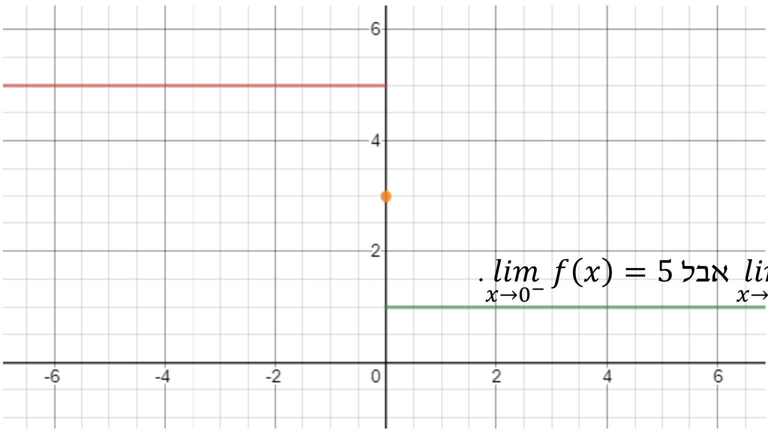
הגדרה

נאמר כי $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ אם לכל $M > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < x - x_0 < \delta$ מתקיים $f(x) > M$.

דוג'

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x < 0 \\ 3 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

אין גבול ב $x = 0$ כי $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ אבל $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 5$.



משפט

לפונקציה $f(x)$ יש גבול בנק' $x = x_0$ אמ"מ הגבולות החד צדדיים של $f(x)$ קיימים ושווים זה לזה, כלומר $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

תרגיל

האם לפונקציה $f(x) = \frac{sin\,(x)}{|x|}$ קיים גבול ב $x = 0$?

פתרון

אנחנו מחפשים גבול ב $x = 0$, ז"א בנקודה בה הפונקציה מוגדרת באופן שונה משני הצדדים, לכן נשתמש בגבולות חד צדדיים.

נרשום את הפונקציה באופן מפורש

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin\,(x)}{|x|} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{sin\,(x)}{x} = 1 & x \geq 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin\,(x)}{-x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

הגבולות לא שווים ולכן לא קיים גבול $x = 0$.

עד עכשיו לא בדקנו את הגבולות מני הצדדים (כי הם היו שווים או שהשתמשנו בגבול המיוחד שהוא נכון לשני הצדדים).

משפט

גבול של פונקציה קיים (גם במובן הרחב) אמ"מ הגבולות החד צדדיים קיימים (במובן הרחב) ושווים.

תרגילים

1. חשבון $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2}}$

פתרון

נבדוק שאיפה ל – 0 משני הצדדים

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=-1\end{cases}$$

הגבולות החד צדדיים שונים זה מזה ולכן אין גבול.

2. עבור אילו ערכי a קיים הגבול ב $x=0$ לפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(3x)}{x} & x>0\\ \frac{x+5}{2x+a} & x<0\end{cases}$$

פתרון

הערה: נשים לב שאין מידע על ערך הפונקציה בנקודה 0 , כי זה לא חשוב למציאת הגבול.

נבדוק את הגבולות החד צדדיים.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\sin(3x)}{3x}=3$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+5}{2x+a}=\frac{5}{a}$$

כדי שיהיה גבול נדרוש שוויון בין הגבולות החד צדדיים, ז"א:

$$\frac{5}{a}=3\ \rightarrow\ a=\frac{5}{3}$$

3. חשבו $\lim\limits_{x\to1}\frac{2}{x-x^2}$

פתרון

4. חשבו $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{3x^2-5x^4}}{x}$

פתרון

אריתמטיקה של גבולות

יהיו 2 פונקציות $f(x),g(x)$ כך ש $f(x)\underset{x\to x_0}{\rightarrow}L$ ו - $g(x)\underset{x\to x_0}{\rightarrow}K$ אזי :

$$f(x)\pm g(x)\underset{x\to x_0}{\rightarrow}L\pm K$$

$$f(x)\cdot g(x)\underset{x\to x_0}{\rightarrow}L\cdot K$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\underset{x\to x_0}{\rightarrow}\frac{L}{K},\quad g(x),K\neq0$$

$$\alpha\cdot f(x)\rightarrow\alpha\cdot L\,,\alpha\in\mathbb{R}$$

שלב ראשון חשוב להציב כדי לבדוק האם אנחנו במצב של חוסר ודאות. חוסר ודאות הוא אחד

מהמצבים הבאים : $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,1^{\infty}$

תרגילים

1. עבור אילו ערכי b קיים הגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ של הפונקציה : $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\neq 0 \\ b & x=0 \end{cases}$

פתרון

מכיוון שערך הפונקציה בנקודה לא חשוב בהגדרת הגבול, לכן לכל ערך של b קיים גבול והוא שווה ל – 1.

.2

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)\cancel{(x-4)}}{(x-1)\cancel{(x-4)}}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)}{(x-1)}=\frac{2}{3}$$

.3

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(9+x)-(9-x)}{x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}$$

$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

4. חשבו $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$

פתרון

גבול חשוב (הזווית צריכה לשאוף לאפס!)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=1$$

1. חשבו $\lim_{x\to 0}\frac{sin(\alpha x)}{sin(\beta x)}$ כאשר α,β שונות מאפס.

פתרון

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(\alpha x)}{sin(\beta x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sin(\alpha x)}{\alpha x}\cdot\frac{\beta x}{\sin(\beta x)}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x}=1\cdot 1\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$$

2. חשבו $\lim_{x\to 0}\frac{cos(\alpha x)}{cos(\beta x)}$ כאשר α,β שונות מאפס.

פתרון

3. חשבו $\lim_{x\to 0}\frac{sin^2(5x)}{3\tan(3x)sin(x)}$

פתרון

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2(5x)}{3\,tan(3x)\,sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2(5x)}{3\frac{sin\,(3x)}{cos\,(3x)}sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2(5x)\cdot cos\,(3x)}{3sin(3x)sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)\cdot sin\,(5x)\cdot cos\,(3x)}{3sin(3x)sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos\,(3x)}{3}\cdot\frac{sin(5x)}{5x}\cdot\frac{sin(5x)}{5x}\cdot\frac{3x}{sin(3x)}\cdot\frac{x}{sin(x)}\cdot\frac{5x\cdot 5x}{3x\cdot x}=\frac{25}{9}$$

4. חשבו $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sinx}-cotx\right)$

פתרון

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sinx}-cotx\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-cosx}{sinx}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(tan\frac{x}{2}\right)=0$$

5. חשבו $\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{cos(x)-cos\,(\alpha)}{x-\alpha}\right)$

נשתמש בזהות טריגונומטרית :

$$cos(x)-cos\,(y)=-2sin\frac{x-y}{2}sin\frac{x+y}{2}$$

$$\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{cos(x)-cos\,(\alpha)}{x-\alpha}\right)=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{-2sin\frac{x-y}{2}sin\frac{x+y}{2}}{x-\alpha}\right)=$$

$$\lim_{x\to\alpha}\left(-\frac{sin\frac{x-\alpha}{2}sin\frac{x+\alpha}{2}}{\frac{x-\alpha}{2}}\right)=\lim_{x\to\alpha}\left(-\frac{sin\frac{x-\alpha}{2}}{\frac{x-\alpha}{2}}\cdot sin\frac{x+\alpha}{2}\right)=-sin\frac{\alpha+\alpha}{2}$$

$$-sin\,(\alpha)$$

.6

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x^3+x^2+x-3}$$

גבול מהצורה $\frac{0}{0}$

נעשה חלוקת פולינומים כי המכנה מתחלק ב - $x-1$ ונקבל

$$x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)$$

לכן

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x^3+x^2+x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x^2+2x+3)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

.7

$$\lim_{x\to 0}\frac{tan(5x)}{sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{cos(5x)\cdot sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos(5x)}\cdot\frac{sin(5x)}{5x}\cdot\frac{2x}{sin(2x)}\cdot\frac{5x}{2x}=$$

$$1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$

.8

$$\lim_{x\to\infty}(e^x-x)$$

גבול מהצורה $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}(e^x-x)=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)=\infty\cdot 1=\infty$$

הוכחנו ש - $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ לכן

.9

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+7sinx}{3+x}\right)^{\frac{1}{sinx}}=$$

גבולות באינסוף

תרגילים

.1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+x}{\sqrt{1+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{1+x}+x)}=\frac{1}{\infty}=0$$

.2

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-x}{1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}=\frac{2}{\infty}=0$$

סדרי גודל כאשר $x\to\infty$ מתקיים:

$$\ln(x)<\sqrt[2]{x}<x^n<e^x$$

$$\begin{pmatrix}\text{פונקציה}\\\text{חסומה}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{פונקציה}\\\text{שואפת לאפס}\end{pmatrix}\to 0$$

.3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2x}=\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{2x}=\begin{pmatrix}\text{פונקציה}\\\text{חסומה}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{פונקציה}\\\text{שואפת לאפס}\end{pmatrix}\to 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot(e^{-x}+1)=\begin{pmatrix}\text{פונקציה}\\\text{שואפת לאפס}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{פונקציה}\\\text{חסומה}\end{pmatrix}\to 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[cos(x)]}{x}=\lim_{x\to\infty}[cos(x)]\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{pmatrix}\text{פונקציה}\\ \text{חסומה}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{פונקציה}\\ \text{שואפת לאפס}\end{pmatrix}\to 0$$

4. הוצאת החזקה הגבוהה במונה (או במכנה) כגורם משותף

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{2}$$

.5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+13}{5x^{17}+3x^4-21}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^{14}}-\frac{2}{x^{15}}+\frac{13}{x^{17}}\right)}{\left(5+\frac{3}{x^{13}}-\frac{21}{x^{17}}\right)}=\frac{0}{5}=0$$

6. הוכח / הפרך :

א. אם $\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\infty$ אזי $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$

ב. אם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\infty$ אזי $\lim_{x\to\infty}[f(x)-x^2]=\infty$

פתרון

משפט הסנדוויץ'

אם מתקיימים $h(x) \le f(x) \le g(x)$ לכל x בסביבת x_0 ו $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$

אזי $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

תרגילים

1. חשבו $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]$

פתרון

פונקציית הערך השלם מקיימת

$$t-1<[t]\le t$$

ולכן מתקיים

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$$

נכפיל ב x (ידוע שהוא חיובי)

$$x\left(\frac{1}{x}-1\right)<x\left[\frac{1}{x}\right]\le x\cdot\frac{1}{x}$$

$$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$$

ונשאיף את x ל 0^+ נקבל ששני האגפים שווים ל – 1 ולכן ממשפט הסנדוויץ' גם

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

הערה: אם לא היה נתון שהשאיפה היא רק מצד ימין היינו צריכים לבדוק את שני הגבולות החד צדדיים (עדין התוצאה היה נשארת 1, כדאי לבדוק).

2. חשבו $\lim_{x\to 0} x\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

דרך א:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{pmatrix}\text{פונקציה}\\ \text{חסומה}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{פונקציה}\\ \text{שואפת לאפס}\end{pmatrix}\to 0$$

דרך ב – ע"פ משפט הסנדוויץ'

$$-|x|\le |x|\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le |x|$$

כאשר x שואף ל – 0 שני האגפים שואפים לאפס ולכן ממשפט הסנדוויץ' מתקיים

$$\lim_{x\to 0} x\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

3. יהיו a,b קבועים חיוביים , חשבו את הגבולות החד צדדים באפס של הביטויים הבאים ובדקו האם קיים הגבול הדו צדדי שם.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{a}\cdot\left[\frac{b}{x}\right],\qquad \lim_{x\to 0}\frac{b}{x}\cdot\left[\frac{x}{a}\right]$$

פתרון

גבול חד צדדי ימני

לכל $0<x<a$ מתקיים $0<\frac{x}{a}<1$, לכן

$$\forall x\in(0,a)\quad \left[\frac{x}{a}\right]=0$$

ומכאן

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{b}{x}\cdot\left[\frac{x}{a}\right]=\frac{b}{x}\cdot 0=0$$

גבול חד צדדי שמאלי

לכל $-a < x < 0$ מתקיים $-1 < \frac{x}{a} < 0$, לכן

$$\forall x \in (-a, 0) \quad \left[\frac{x}{a}\right] = -1$$

ומכאן

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{b}{x} \cdot \left[\frac{x}{a}\right] = \frac{b}{x} \cdot (-1) = -\infty \cdot (-1) = \infty$$

לכן הגבול הדו צדדי לא קיים.

הפעם הביטוי בתוך הערך השלם שואף לאינסוף (או מינוס אינסוף), לכן נשתמש בהגדרת הערך השלם

$$t - 1 < [t] \leq t$$

ולכן מתקיים

$$x \neq 0, \qquad \frac{b}{x} - 1 < \left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{b}{x}$$

גבול חד צדדי ימני באפס

נכפיל ב - $\frac{x}{a}$ (ידוע שהוא חיובי)

$$\frac{x}{a}\left(\frac{b}{x} - 1\right) < \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{x}{a} \cdot \frac{b}{x}$$

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{b}{a}$$

ונשאיף את x ל 0^+ נקבל ששני האגפים שווים ל $\frac{b}{a}$ – ולכן ממשפט הסנדוויץ' גם

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = \frac{b}{a}$$

גבול חד צדדי שמאלי באפס

$$x \neq 0, \qquad \frac{b}{x} - 1 < \left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{b}{x}$$

נכפיל ב - $\frac{x}{a}$ (ידוע שהוא שלילי)

$$\frac{x}{a}\left(\frac{b}{x}-1\right)>\frac{x}{a}\cdot\left[\frac{b}{x}\right]\geq\frac{x}{a}\cdot\frac{b}{x}$$

$$\frac{b}{a}-\frac{x}{a}>\frac{x}{a}\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\geq\frac{b}{a}$$

ונשאיף את x ל 0^+ נקבל ששני האגפים שווים ל $-\frac{b}{a}$ ולכן ממשפט הסנדוויץ' גם

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x}{a}\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{b}{a}$$

ולכן הגבול הדו צדדי באפס שווה ל - $\frac{b}{a}$.

אם $f(x)$ פונקציה רציפה ו $\lim_{x\to x_0}g(x)=G$ אזי

$$\lim_{x\to x_0}f(\,g(x))=f(\lim_{x\to x_0}g(x))=f(G)$$

דוג'

$$\lim_{x\to x_0}ln[\,sin\,(x)+5]=\ln\,[\lim_{x\to x_0}(sinx+5)]=\ln\,[sin(x_0)+5]$$

הגבול e

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{b}{f(x)}\right)^{f(x)}=e^{b},\qquad \lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

חשבן $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{2x^3+x^2+6}\right)^{x+\frac{6}{x^2}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{2x^3+x^2+6}\right)^{x+\frac{6}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x^2+x+\frac{6}{x}}\right)^{x+\frac{6}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x^2+x+\frac{6}{x}}\right)^{2x+\frac{12}{x^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x^2+x+\frac{6}{x}}\right)^{2x^2+x+\frac{6}{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{2x^2+x+\frac{6}{x}}\right)^{-x+\frac{6}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

הסוגריים הראשונות הן e

נסתכל על הסוגריים השניות

$$1\le\left[\left(1+\frac{1}{2x^2+x+\frac{6}{x}}\right)^{x^2-6}\right]^{-\frac{1}{x}}\le\left[\left(1+\frac{1}{2x^2+x+\frac{6}{x}}\right)^{2x^2+x+\frac{6}{x}}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\to 1$$

עבור x
מספיק גדול

לסיכום: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{2x^3+x^2+6}\right)^{x+\frac{6}{x^2}}=\sqrt{e}$

הקשר בין גבול סדרה לגבול של פונקציה

משפט היינה

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \leftrightarrow$$

לכל סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש $a_n \to x_0$
שעבורה $a_n = x_0$ רק מספר סופי של פעמים
מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$

מסקנה

אם יש 2 סדרות $a_n \to x_0$ ו - $b_n \to x_0$ כך ש $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ אז $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

לא קיים. נשתמש בהיינה כדי להפריך גבולות.

תרגילים

1. הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$ לא קיים.

פתרון

נחפש 2 סדרות $a_n, b_n \to \infty$ כך ש $\lim_{n\to\infty} \sin(b_n) \neq \lim_{n\to\infty} \sin(a_n)$

למשל $b_n = \pi + \pi n$, $\quad a_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$$\lim_{n\to\infty} \sin(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \sin(b_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(\pi + \pi n) = 0$$

2. הוכיחו כי $\lim_{x\to 0} e^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ לא קיים.

פתרון

3. הוכיחו כי $\lim_{x\to 0}\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)^n$ לא קיים.

פתרון

עבור n זוגי $\lim_{x\to 0}\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)^n = \lim_{x\to 0}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$

עבור n אי זוגי $\lim_{x\to 0}\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)^n = \lim_{x\to 0}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

.4

נתון $\lim_{x\to b} f(x) = L$

יהי $a \neq 0$ הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{x\to 0} f(ax+b) = L$

פתרון

פתרנו תרגיל זה בהגדרת הגבול לפי קושי, הפעם נפתור בעזרת היינה.

תהי $0 \neq x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ סדרה כלשהי, צריך להוכיח ש -

$$\lim_{n\to\infty} f(ax_n+b) = L$$

הסדרה $y_n = ax_n + b$ מקיימת מאריתמטיקה

$$b \neq y_n = ax_n + b \xrightarrow[n\to\infty]{} b$$

לכן לפי משפט היינה מהנתון $\lim_{x\to b} f(x) = L$ מתקיים ש -

$$\lim_{n\to\infty} f(ax_n+b) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = L$$

.5

נכון או לא נכון

אם $\lim_{n\to\infty} n\cdot a_n = 1$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n} = 1$

הטענה נכונה

נראה שמתקיים $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} a_n \neq 0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n} = 1$ לפי משפט היינה עם גבול של הפונקציה $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

נתון כי $\lim_{n\to\infty} n\cdot a_n = 1$ ולכן אם נבחר $\varepsilon = 1$ קיים N כך שלכל $N < n$ מתקיים

$$-\varepsilon + 1 < n\cdot a_n < \varepsilon + 1$$

$$0 < n\cdot a_n < 2$$

ז"א

$$0 < a_n < \frac{2}{n}$$

ומאכן לפי סנדוויץ'

$$0 < a_n < \frac{2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

.6

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n-(n-1)^n}{n^n+n^2} =$$

.7

אם הפונקציות $f(x),g(x)$ מקיימות $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

והסדרות a_n,b_n מקיימות

$$1\neq a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,\quad 1\neq b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

אז

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(b_n)}=1$$

הטענה לא נכונה

דוגמה נגדית

$$f(x)=sin(x-1)\,,g(x)=x-1$$

מתקיים

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{sin(x-1)}{(x-1)}=1$$

למרות שהגבול לא מוגדר ב – 1.

$$a_n=1-\frac{1}{n},b_n=1-\frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(b_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1-\frac{1}{n}\right)}{g\left(1-\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{sin\left(1-\frac{1}{n}-1\right)}{\left(1-\frac{2}{n}-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-sin\left(\frac{1}{n}\right)}{-2\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}\neq 1$$

.8

אם $f(x) > 0$ וקיים הגבול הסופי $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אז קיים גם הגבול $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$.

הטענה לא נכונה

$$f(x) = \frac{2 + (-1)^{[x]}}{x}$$

הגבול של הפונקציה באינסוף שווה לאפס. אבל לפונקציה

$$g(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\frac{1 + (-1)^{[x+1]}}{x+1}}{\frac{1 + (-1)^{[x]}}{x}} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{2 + (-1)^{[x+1]}}{2 + (-1)^{[x]}}$$

עבור הסדרה $x_n = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ נקבל

$$g(x_n) = g(n) = \begin{cases} \frac{1}{3} & n = 2k \\ 3 & n = 2k+1 \end{cases}$$

ואז

$$\lim_{n\to\infty} g(x_{2n}) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} g(x_{2n+1}) = 3$$

שאלות ממבחנים

.1

תהי $f(x), g(x): R \to R$ מהי הטענה הלא נכונה?

א. אם f עולה ממש ו $-g$ יורדת ממש אז $g \circ f \circ g: R \to R$ עולה ממש.

ב. אם f עולה ממש ועל ו $-g$ חח״ע אז $g \circ f$ חח״ע.

ג. אם f חסומה אז $g \circ f$ חסומה.

ד. אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ו - $\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = \infty$ אז $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

פתרון

.2

תהי $f(x): R \to R$ מהי הטענה הלא נכונה?

א. אם f אי זוגית והגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיים אז הוא שווה לאפס.

ב. אם f זוגית והגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיים אז $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

ג. אם f חסומה, ו - $g(x) = arctanx$ אז גם $f \circ g: R \to R$ חסומה.

ד. אם f עולה והפיכה אז f^{-1} עולה ממש.

פתרון

.3

חשבו

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

השתמשו ב - $[x] \leq x < [x] + 1$

פתרון

.4

תהי $f(x), g(x): R \to R$

אם הגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיים והגבול $\lim_{x\to 0} g(x)$ לא קיים, אז $\lim_{x\to 0} f(x) \cdot g(x)$. לא קיים.

הטענה לא נכונה

.5

תהי $f: R \to R$ ויהי $L \in R$ כך ש - $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ אמ״מ $\lim_{x\to 0} f(x^3) = L$.

הטענה נכונה

.6

חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{arctan\left(4-\frac{3x}{\pi}\right)tanx}=$$

שאלות חזרה

1. הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית: אם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ אז $\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\infty$.

2. חשבו $\lim_{x\to0}\frac{sin(mx)}{sin(nx)}$ עבור $n\neq0$.

3. הוכיחו כי אם $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ אז $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

4. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \le 3 \\ e^{2-x}, & 3 < x \end{cases}$$

אזי:

א. הפונקציה מונוטונית יורדת בקטע $(1,5]$

ב. הפונקציה חד-חד ערכית בקטע $(1,5]$.

ג. הגבול $\lim_{x\to 3} f(x)$ קיים וסופי.

ד. לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x_n \in (1,5]$ עבורו מתקיים: $f(x_n) > 1 - 1/n$

5. נתון כי $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$ כאשר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. אז

א. יש סביבה שמאלית מנוקבת של 1 בה $f(x)<0$.

ב. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$

ג. $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ אינו קיים.

ד. יש סביבה מנוקבת של 0 בה

6. לכל $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקיים כי

א. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ אזי $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$

ב. אם $\lim\limits_{x\to1}f(x)=5$ אזי $\lim\limits_{x\to0}f\left(\frac{|x|}{x}\right)=5$

ג. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\infty$ אזי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

ד. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=0$ אזי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

7. לכל $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקיים כי

א. אם $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = M \le L = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ אז יש סביבה מנוקבת של 0 בה מתקיים $f(x) \le g(x)$.

ב. אם $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = L = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ אז יש סביבה מנוקבת של 0 בה מתקיים $f(x) = g(x)$.

ג. אם $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = M \le L = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ וגם יש סביבה מנוקבת של 0 בה מתקיים $f(x) > g(x)$ אז $L = M$.

ד. אם קיימת סביבה שמאלית מנוקבת של 0 בה $f(x) = g(x)$, וגם $\lim\limits_{x\to 0} g(x), \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ קיימים, אז הגבולות שווים.

8. הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x-1}{x+1} = 3$.

9.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{32x^5+4x^6}}{\sqrt{4x^2-3x^3}}$$

.10

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2(2x)}{2x\sin(3x)}$$

.11

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}=$$

.12 תהי: $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ אזי:

א. הפונקציה מונוטונית יורדת בקטע $(-1,1)$

ב. הפונקציה חד-חד ערכית בקטע $(-1,1)$.

ג. הגבול $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ קיים וסופי.

ד. קיים $n\in\mathbb{N}$ וקיים $x\in(-1,5]$ עבורו מתקיים: $f(x)<-1/n$

.13

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-1}\right)=4$$

אזי

$$a=1,\quad a=3,\qquad a=7,\quad a=8$$

.14

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin([x]^2)}{x^2}$$

.15 לכל $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקיים כי

א. אם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ אזי $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$

ב. אם $\lim_{x\to 5}f(x)=5$ אזי $\lim_{x\to 5}f\left(f(x)\right)=5$

ג. אם $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=1$ אזי $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

ד. אם $\lim_{x\to 0}f(x^2)=0$ אזי $\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$

16. האם הטענות הבאות נכונות?

לכל $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ חסומה ו- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כלשהי, מתקיים כי $f \circ g$ חסומה.

לכל $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ חסומה ו- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כלשהי, מתקיים כי $f \circ g$ חסומה.

אם $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ וגם $\lim_{x\to\infty} f\big(g(x)\big) = \infty$ אז בהכרח $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

הגבול של הסדרה $a_n = \frac{n}{(n+\sqrt{1})^2} + \frac{n}{\left(n+\sqrt{2}\right)^2} + \cdots + \frac{n}{\left(n+\sqrt{n}\right)^2}$ קיים (וסופי) כאשר n שואף ל- ∞.

17. הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{-x+1} = -5$.

18.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(3x^2)}{sin(2x)\, tg(|x|)}$$

.19

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(\log x^{\frac{1}{2}}\right)}{\log\left(\log x^{\frac{1}{4}}\right)} =$$

.20 הוכיחו לפי הגדרה $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$

.21 הוכיחו לפי הגדרה $\lim_{x\to -1} \frac{x}{2x+1} = 1$

.22

$$\lim_{x\to 0}(cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$$

שאלות נוספות לחזרה

.1

לכל $f,g: R \to R$ מתקיים כי

א. אם f זוגית אזי $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

ב. אם f אי זוגית אזי $\lim_{x\to 1} f(x) = -f(-1)$

ג. אם $\lim_{x\to 0}(f(x)-g(x)) = 1$ וגם $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ אזי $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

ד. אם $\lim_{x\to \infty}(f(x)-g(x)) = 1$ וגם $g(x) \neq 0$ לכל x אזי $\lim_{x\to \infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

פתרון

.2

נגדיר

$$f(x)=\begin{cases}[x^x]+1 & x>0\\ 2^{(x^{-2})} & x<0\\ 2 & x=0\end{cases}$$

בחרו בתשובה הנכונה

א. התמונה של הפונקציה היא $[1,\infty)$.

ב. הפונקציה חסומה על $[-1,2]$.

ג. הפונקציה יורדת על R.

ד. $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיים (וסופי)

פתרון

.3

הוכיחו כי אם $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ אז $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

הוכחה

.4

הוכיחו או הפריכו כי אם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ אז $\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\infty$

הטענה נכונה

3. חשבו $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)\tan^2(x)}{x\sin(5x^2)}$

פתרון

.5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x^5+6x^6}}{\sqrt{x^2-x^3}}=$$

.6

נתון $\lim_{x\to\infty}2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-1}\right)=2$ מהו ערכו של a?

פתרון

.7

חשבו את הגבולות הבאים אם הם קיימים, אם לא הסבירו מדוע אינם קיימים

א.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\sin x}}{x^2}$$

ב.

$$\lim_{x\to 0}\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]= \qquad a,b\in R^+$$

פתרון

.8

נתונות הפונקציות $f,g: R \to R$ כך שמתקיים $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$ אז $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f^2(x)} = 0$.

הטענה לא נכונה

.9

אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ אז $\lim_{x\to0} f\left(\frac{2}{x^2}\right) = 2$.

הטענה נכונה

.10

תהי

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

א. $\lim_{x\to0}|f(x)| = \infty$

ב. הפונקציה חד חד ערכית בקטע $(-1,1)$.

ג. $\lim_{x\to0} f(x) = 1$

ד. לכל $n \in N$ קיימים $x_1, x_2 \in (-1,0)$ עבורם מתקיים $f(x_1) < -n, f(x_2) > n$

פתרון

.11

נתון כי $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+c\sin(x)}-2}{2x} = 1$ אזי

א. $c = 1$

ב. $c = 3$

ג. $c = 7$

ד. $c = 8$

פתרון

.12

אם $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ אז

א. $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

ב. יש סביבה שמאלית נקודה של 1 בה $f(x) > 0$.

ג. $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = 1$

ד. $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{\tan(x-1)} = 3$

פתרון

.13

א. מצאו את הגבול הבא

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x\sin(x^2)+2\cos x}{2x^2-x\cos x+2\sin x}=$$

ב מצאו את הגבול הבא

$$\lim_{x\to1}\frac{\tan(x^2-1)\cdot\sin x}{x\cdot\sin(x-1)}=$$

ג.

אם $h(x)\le g(x)\le f(x)$ לכל x. וגהגבולות הבאים קיימים וסופיים

$\lim_{x\to0^+}h(x),\ \lim_{x\to0^-}f(x),\ \lim_{x\to0}g(x)$ וגם $\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=L$ אז $\lim_{x\to0}g(x)=L$.

פתרון

.14

בוחן חורף 2020 דצמבר שאלה 1

תהי

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x<0\\ \frac{\sin(x)}{x} & x>0\\ 8 & x=0\end{cases}$$

א. $\lim_{x\to0}f(x)=0$

ב. הפונקציה חד חד ערכית בקטע $(-3\pi, 3\pi)$.

ג. $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = 1$

ד. לכל $n \in N$ קיימים $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, \infty)$ עבורם מתקיים

$f(x_1) > 1 - \frac{1}{n}, f(x_2) > 1 - \frac{1}{n}$

פתרון

.15

נתון $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-1}\right) = 4$ מהו ערכו של a?

פתרון

.16

אם $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x-1} = 4$ אז

א. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

ב. יש $N > 0$ כך שלכל $x > N$ מתקיים $f(x) > 4(x-1)$ או שיש יש $N > 0$ כך שלכל $x > N$ מתקיים $f(x) < 4(x-1)$.

ג. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{2+sinx} = \infty$

ד. $\lim_{x\to\infty} f(x) - 4(x-1) = 0$

פתרון

.17

לכל $f, g: R \to R$ מתקיים כי:

א. אם $f(x)$ זוגית, אזי הגבולות החד צדדיים ב 0 – קיימים ו - $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

ב. אם $f(x)$ אי זוגית והגבול החד צדדי $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ קיים אז $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ קיים ו –

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

ג. אם $\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = \infty$ וגם $g(x) \neq 0$ אזי $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

ד. אם $\lim_{x\to -\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = 1$ וגם $g(x) \neq 0$ אזי $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

פתרון

.18

כל $f: R \to R$ ולכל $L \in R$ מתקיים כי $\lim_{x\to 0} f(x^3) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x^2) = L$

.19

א.

מצאו את הגבול הבא

$$\lim_{x\to 2}\frac{tan(x^2-4)\cdot sinx}{|x|\cdot sin\,(\sqrt{x}-\sqrt{2})}=$$

ב.

$$\lim_{x\to 0} sin^2(x)\cdot ln\left(1+e^{\frac{1}{x^2}}\right)=$$

.20

מהי הטענה הנכונה

א. אם לכל k טבעי מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{(-1)^k}{n^k}\right)=0$ אז $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

ב. אם $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=8$ אז $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)=0$

ג. אם $0\neq b_n\to 0, 0\neq a_n\to 0$ אז $\frac{sina_n}{b_n}\to 1$

ד. אם $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ אז $\lim_{n\to\infty} n\cdot f\left(\frac{1}{n^2}\right)=0$

פתרון

.21

א. מצאו את הגבול הבא (אם הוא קיים)

$$\lim_{x\to 1}\frac{tan(x^2-1)\cdot cos\,(x^3-1)}{|x|\cdot(x^3-1)}=$$

ב.

מצאו את הגבול הבא (אם הוא קיים)

$$\lim_{x\to\infty} x(ln(2x-1) - ln\,(2x+5)) =$$

22.

נתונה $f(x) = \begin{cases} arctan\,\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \end{cases}$ סמנו את הטענה הנכונה

א. $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

ב. הפונקציה חד חד ערכית בקטע $(-\infty, \infty)$.

ג. $f(x)$ פונקציה אי זוגית בקטע $(-\infty, \infty)$.

ד. קיים $n \in N$ עבורו קיים $x < 0$ עבורו $f(x) > \frac{1}{n}$

פתרון

23

נכון / לא נכון

א.

אם לכל x מתקיים כי $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ וגם $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = L$ אז $\lim_{x\to 0} g(x)$ קיים ושווה ל - L.

ב.

אם $f(x) \leq g(x)$ לכל x וגם $f(x)$ עולה וגם $\lim_{x\to 0} g(x)$ קיים, אז $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיים.

מצאו את הגבול הבא (אם הוא קיים)

א.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\,sin(2x^{1.5})}{tan^2(3x)}=$$

ב.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{2x^4+6x^6}}{\sqrt[6]{3x^6+x^7}}=$$

ג.

נתונות הפונקציות $f,g\colon R\to R$ ידוע כי f מונוטונית עולה ו $g-$ פונקציה חסומה. בנוסף $f(x)\le g(x)\le f(x+1)$ לכל x. הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} g(x)$ קיים.

פתרון

שאלות נוספות

1.

נסחו והוכיחו את כלל הסנדוויץ עבור גבול סופי בנקודה.

פתרוןf,g,h שלוש פונקציות המוגדרות בקטע I ומקיימות בו $f\le g\le h$. נתון שעבור $x=a\in I$ מתקיים $\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a} f(x)=L$ גבול סופי. אזי גם $\lim_{x\to a} g(x)=L$.

הוכחה

.2

א. לכל $f: R \to R$ ולכל $L \in R$ מתקיים כי $\lim_{x\to 0} f(x^3) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = L$

ב. לכל $f: R \to R$ ולכל $L \in R$ אם לכל $\delta > 0$ מתקיים שכאשר $0 < |x-a| < \delta$ אז

נסמן $\delta^2 = \varepsilon > 0$. וזוהי הגדרת הגבול, לכן מתקיים $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

ג. אם $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ וגם $\lim_{x\to 1} g(f(x)) = 0$ אז בהכרח $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

ד. אם $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים וסופי וגם $\lim_{x\to a}(3f(x) - 2g(x))$ קיים וסופי אז $\lim_{x\to a} g(x)$ קיים וסופי.

.3

אחת האפשריות הבאות גוררת ש - $\lim_{x\to a} f(x) = L$ (a, L סופיים) בחרו אותה

א. לכל $\delta > 0$ מתקיים שכאשר $0 < |x-0| < \delta^2$ אז $|f(x) - L| < 2\delta$

ב. קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ כאשר $0 < |x-0| < \delta$ אז $|f(x) - L| < \varepsilon$

ג. לכל $\delta > 0$ מתקיים שכאשר $0 < |x-0| < \delta$ אז $|f(x) - L| < 1 + \delta$

ד. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שכאשר $0 < |x-0| < \varepsilon$ אז $|f(x) - L| < \delta$

פתרון

.4

$f: R \to R$ מהי הטענה הנכונה

א. אם $\lim_{x\to 0} \sin(f(x)) = 0$ אז $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

ב. אם $\lim_{x\to 0} (f(x))^4$ קיים אז $\lim_{x\to 0} |f(x)|$ קיים.

ג. אם $\lim_{x\to\infty}(f(x))^x = \infty$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

ד. אם $\lim_{x\to 0} arctan\,(f(x))$ קיים אז $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיים.

פתרון