פתרונות וידאו מלאים באתר

חשבוניה

תרגול 7

משפט רול

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב - $[a,b]$ וגזירה ב - (a,b) ומתקיים $f(a)=f(b)$ אזי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש- $f'(c)=0$.

הרעיון מאחורי המשפט: $f(x)$ מקבלת את אותם ערכים בקצוות ולכן אם היא איננה קבועה, בין העלייה לירידה יש לה נקודת קיצון בה הנגזרת מתאפסת.

מסקנה 1: אם ל - $f(x)$ יש נקודות עם ערך שווה אז ל - $f'(x)$ יש לפחות $n-1$ נקודות שהיא מתאפסת.

מסקנה 2: אם ל - $f'(x)$ יש בדיוק n נקודות שהיא מתאפסת אזי ל $f(x)$ יש לכל היותר $n+1$ נקודות בעלות ערך זהה.

מסקנה 3: אם ל $f^{(k)}(x)$ יש בדיוק n נקודות בהן היא מתאפסת אז ל - $f^{(k-1)}(x)$ יש לכל היותר $n+1$ נקודות בעלות ערך זהה ⋯ ל - $f(x)$ יש לכל היותר $n+k$ נקודות בעלות ערכים זהים.

תרגילים

1. הוכיחו כי למשוואה $x^n-x+k=0$ יש לכל היותר שורש אחד ב $[1,2]$ כאשר $2\le n\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{R}$.

פתרון

נגדיר $f(x)=x^n-x+k$. $f(x)$ רציפה ב - $[1,2]$ וגזירה ב - $(1,2)$. נראה שב - $[1,2]$) $f'(x)\neq 0$ ולכן ל - $f(x)$ יש לכל היותר שורש אחד בתחום.

$$f'(x)=nx^{n-1}-1 \;\rightarrow\; x^{n-1}=\frac{1}{n} \;\rightarrow\; x=\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}\le\sqrt[n-1]{\frac{1}{1}}=1$$

כלומר, ב- $[1,2]$ ל - $f'(x)$ אין שורש ולכן ל - $f(x)$ יש לכל היותר שורש אחד.

2. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x^2 + sinx = 0$

פתרון

ממשפט רול נקבל כמה פתרונות יש לכל היותר ממשפט עה״ב נקבל כמה פתרונות יש לכל הפחות, משילוב של שני המשפטים נוכל למצוא כמה פתרונות בדיוק יש למשוואה.

נגדיר $f(x) = x^2 + sinx$, f רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2x + cosx$$

$$f''(x) = 2 - sinx > 0$$

לכן ממשפט רול אם ל f'' אין שורשים אזי ל $- f$ יש לכל היותר 2 שורשים.

נשים לב כי $x = 0$ הוא פתרון של המשוואה. נסתכל על תחום $[a, b]$ שלא מכיל את ה -0. כך ש $f(a) > 0, f(b) < 0$ ונקבל ממשפט עה״ב פתרון נוסף.

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{36} - \frac{1}{2} < 0, \quad f(-\pi) = \pi^2 - 0 > 0$$

לכן בתחום $\left[-\pi, -\frac{\pi}{6}\right]$ קיים שורש נוסף למשוואה.

לסיכום: ממשפט רול קבלנו שלמשוואה יש לכל היותר 2 שורשים. ממשפט עה״ב קבלנו שיש לפחות 2 שורשים למשוואה ולכן למשוואה יש בדיוק 2 שורשים.

3. הוכיחו כי למשוואה $x - \frac{1}{2}sinx = 3$ יש פתרון ממשי אחד ויחיד.

פתרון

4. כמה שורשים ממשיים יש לפולינום $p(x) = x^4 - 6x^3 + 24x^2 - 63x - 2$?

פתרון

5. הראו כי לפולינום $g(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c)$ יש שורש אחד בקטע $(0,1)$.

פתרון

6. תהי $f(x)$ גזירה ב $[0, \infty)$ כך ש - $f(0) = 0$ ו - $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0, \infty)$ כך ש - $f'(c) = 0$.

פתרון

נפריד לשני מקרים:

א. אם $f(1) = 0$ אזי לפי משפט רול קיימת נקודה $c \in (0,1)$ כך ש - $f'(c) = 0$.

ב. אם $f(1) \neq 0$ בה"כ נניח $f(1) > 0$ כיוון ש - $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ קיים $x_0 > 1$ כך ש – $f(x_0) < f(1)$. נסתכל על הקטע $[0, x_0]$ הפונקציה גזירה בקטע הנ"ל ולכן רציפה וממשפט ויישטראס מקבלת שם מקסימום ומינימום. כיון ש $f(x_0) < f(1)$ וגם $f(0) < f(1)$ ו – 1 נקודת פנימית, לכן המקסימום יתקבל בנקודה פנימית $c \in (0, x_0)$, לפי משפט פרמה נקבל ש –

.$f'(c)=0$

תרגיל 7

תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה ב - (a,b) ומקיימת $a^2-b^2=f^2(b)-f^2(a)$

הוכיחו כי למשוואה $f(x)\cdot f'(x)+x=0$ יש לפחות פתרון אחד בקטע.

פתרון

נגדיר את הפונקציה

$$g(x)=\frac{1}{2}f^2(x)+\frac{1}{2}x^2$$

$g(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה ב - (a,b) כסכום ומכפלה של פונ' גזירות.

נשתמש בנתון

$$a^2+f^2(a)=b^2+f^2(b) \quad /2$$

$$\frac{a^2+f^2(a)}{2}=\frac{b^2+f^2(b)}{2}$$

$$g(a)=g(b)$$

ז"א ש - $g(x)$ מקיימת את תנאי משפט רול ולכן קיימת נקי' $c\in[a,b]$ כך ש - $g'(c)=0$

ז"א

$$g'(c)=f(c)\cdot f'(c)+c=0$$

ז"א ש c – הוא פתרון של המשוואה דלעיל.

תרגיל 8

תהי $f:R\rightarrow R$ גזירה כך ש - $f'(x)\neq f(x)$ לכל x.

הוכיחו שלמשוואה $f(x) = e^x$ יש לכל היותר פתרון ממשי יחיד.

פתרון

$$f(x) = e^x \quad \leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{e^x} = 1$$

נניח בשלילה שיש 2 פתרונות ממשיים $a < b$ נגדיר את הפונקציה הגזירה $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$

מתקיים לפי ההנחה $g(a) = g(b) = 1$ ולכן בקטע $[a,b]$ מתקיימים תנאי משפט רול ולכן

קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש - $g'(c) = 0$ אבל זה סתירה לנתון

$$g'(x) = \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} \neq 0$$

כי נתון - $f'(x) \neq f(x)$ לכל x.

משפט לגראנז׳

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב - $[a,b]$ וגזירה ב - (a,b) ומתקיים אזי קיימת נקודה $c \in [a,b]$

כך ש- $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

משמעות גאומטרית: צד ימין הוא שיפוע הישר המחבר בין 2 נקודות הקצה של התחום, המשפט מבטיח שיש נקודה c בקטע בה הישר המשיק מקביל לישר הנ״ל.

הערה: נשים לב שמשפט רול הוא מקרה פרטי של לגראנז׳.

מסקנה 1: f קבועה ב $[a,b]$ $\leftrightarrow$ $f' \equiv 0$ ב - (a,b).

מסקנה 2: אם $f' > 0$ ב - (a,b) אז f מונוטונית עולה ב - $[a,b]$.

אם $f' < 0$ ב - (a,b) אז f מונוטונית יורדת ב - $[a,b]$.

תרגילים

1. הוכיחו כי אם $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ אזי

$$\frac{1}{cos^2\alpha} < \frac{tan\beta - tan\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{cos^2\beta}$$

פתרון

הביטוי האמצעי מזכיר את לגראנז', נגדיר $f(x) = tanx$ ב - $[\alpha, \beta]$. f גזירה ב - (α, β) ולכן

קיימת נקודה $c \in (\alpha, \beta)$ כך ש

$$f'(c) = \frac{1}{cos^2c} = \frac{tan\beta - tan\alpha}{\beta - \alpha}$$

היות ו - $cosx$ פונקציה יורדת בתחום לכן מתקיים עבור $\alpha < c < \beta$:

$$\frac{1}{cos^2\alpha} < \frac{1}{cos^2c} < \frac{1}{cos^2\beta}$$

ולסיכום:

$$\frac{1}{cos^2\alpha} < \frac{tan\beta - tan\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{cos^2\beta}$$

2. הוכיחו כי אם $0 < a < b \ \forall$ אזי

$$\frac{b-a}{1+b^2} < arctan(b) - arctan\,(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$$

פתרון

3. הוכיחו כי אם $x \geq 1$ אזי

$$2arctanx + arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \pi$$

פתרון

.4

הוכיחו כי $f(x) = x + sin(x)$ פונקציה עולה ממש.

פתרון

$f(x)$ גזירה לכל x ומתקיים $f'(x) = 1 + cosx > 0$ לכל $x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

מכיוון ש - f רציפה ב - $[a,b]$ וגזירה ב - (a,b) מתקיים שאם $f' > 0$ לכל $x \in (a,b)$ אזי f עולה ממש ב - $[a,b]$.

לכן אצלנו, עבור כל k שלם f עולה ממש ב - $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$ הקטעים הללו מכסים את כל הישר (עם חפיפות בכפולות של k אי זוגי.

.5

תהי $f(x)$ רציפה ב - $[0,1]$ וגזירה ב - $(0,1)$ המקיימת $f(0) = 0, f(1) = 1$ וכן $f'(x) \leq 2x$ לכל $x \in (0,1)$ הוכיחו כי $f(x) = x^2$ $\forall x \in [0,1]$.

פתרון

נגדיר $g(x) = f(x) - x^2$ נראה ש $g(x) \equiv 0$ ב - $[0,1]$.

$g(x)$ רציפה ב - $[0,1]$ וגזירה ב - $(0,1)$ כהפרש של פונקציות רציפות וגזירות, ונגזרתה מקיימת

$$\forall x \in [0,1] \;\; g'(x) = f'(x) - 2x \leq 0$$

לכן $g(x)$ יורדת בקטע $(0,1)$ ומכאן שלכל $0 \leq x \leq 1$ מתקיים:

$$0 \leq g(1) \leq g(x) \leq g(0) \leq 0$$

כלומר $\forall x \in [0,1] \;\; g(x) \equiv 0$.

6. הוכיחו כי $x < tanx$ לכל $0 < x < \frac{\pi}{2}$

פתרון

נגדיר $f(x) = tanx - x$. f רציפה וגזירה לכל $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ומתקיים

$$f' = \frac{1}{cos^2x} - 1 = \frac{1 - cos^2x}{cos^2x} = \frac{sin^2x}{cos^2x} = tan^2x > 0$$

לכן f פונקציה מונוטונית עולה ממש. בנוסף $f(0) = 0$ לכן לכל $0 < x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים

$$0 < f(x) = tanx - x \;\; \rightarrow \;\; tanx > x$$

7. הוכיחו כי $x + \frac{x^3}{3} < tanx$ לכל $0 < x < \frac{\pi}{2}$

פתרון

8. יהיו $p(x)=a_0+a_1x+\cdots a_nx^n$ הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(0,1)$ כך ש -

. $p'(c)=a_1+a_2+\cdots a_n$

פתרון

$$p(0)=a_0, \qquad p(1)=a_0+a_1+\cdots a_n$$

$p(x)$ פולינום לכן רציף וגזיר בכל $\mathbb{R}$ בפרט ב - $[0,1]$ לכן לפי משפט לגראנז׳ קיימת

נקודה $c\in(0,1)$ כך ש $-$

$$p'(c)=\frac{p(1)-p(0)}{1-0}=a_1+a_2+\cdots a_n$$

פונקציה קמורה

הגדרה

פונקציה $f(x)$ המוגדרת בקטע I היא קמורה בקטע,

אם לכל $x_1,x_2\in I$ ולכל $0\le\lambda\le1$ מתקיים

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le f(\lambda x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

משמעות גאומטרית

$f(x)$ קמורה בקטע I אמ״מ לכל $x_1,x_2\in I$ המיתר המחבר בין הנקודות לכל x_1,x_2

נמצא מעל גרף הפונקציה לכל $f(x)$.

הוכיחו הפריכו , עבור פונקציה f המוגדרת בקטע סגור $I = [a,b]$.

א. אם f מונוטונית עולה ב- I אז f קמורה ב $- I$.

הטענה לא נכונה, $f = x^3$ בקטע סימטרי סביב הראשית , בחלק השמאלי היא קעורה ובימני היא קמורה.

ב. אם f מונוטנית יורדת ב- I אז f קמורה ב $- I$

הטענה לא נכונה $[-1,1]$ $-x^3$ $[-1,0]$, $f = -x^2$

ג. אם f קמורה ב $- I$ אז f מונוטונית ב $- I$.

הטענה לא נכונה $f = x^2$ בקטע $[-1,1]$

ד. אם f קמורה ב $- I$ ו - a נקודת מינימום של f ב $- I$ אז f מונוטונית עולה ב $- I$.

הטענה נכונה

$x_1, x_2 \in I$ לפי למת השיפועים

$$0 \leq \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

לכן $f(x_1) \leq f(x_2)$.

ה. אם f קמורה ב $- I$ ו - b נקודת מינימום של f ב $- I$ אז f מונוטונית יורדת ב $- I$.

הטענה נכונה, כמו סעיף קודם

ו. אם f קמורה ב $- I$ ו - a (או b) נקודת מקסימום של f ב $- I$ אז f מונוטונית יורדת (עולה) ב $- I$.

הטענה לא נכונה $f = x^2$ בקטע $[-1,1]$

חקירת פונקציה

1. חקרו את הפונקציה $f(x)=\frac{2(x^2+2x+4)}{x+2}$

פתרון

א. תחום ההגדרה $x\neq -2$

ב.

חיתוך עם הצירים

$$f(x)=0\ \ \rightarrow\ \frac{2(x^2+2x+4)}{x+2}=0\ \ \rightarrow$$ אין פתרון

$$x=0\ \ \rightarrow f(0)=\frac{2(0+2\cdot 0+4)}{0+2}=4\ \ \rightarrow\ \ (0,4)$$

ג.

$$f'(x)=\frac{2(2x+2)(x+2)-2(x^2+2x+4)}{(x+2)^2}=$$

$$\frac{2(2x^2+6x+4)-2(x^2+2x+4)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+8x}{(x+2)^2}$$

הנגזרת מתאפסת

$$0=2x^2+8x=2x(x+4)\ \rightarrow x=0,-4$$

x	$-\infty<x$	-4	$<x<$	-2	$<x<$	0	$<x<\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	לא קיים	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

תחום ירידה: $-4<x<-2,-2<x<0$

תחום עליה: $x<-4,\ \ 0<x$

$f(0) = -4$ נקודת מינימום. $f(-4) = -12$ נקודת מקסימום.

ד.

נקודת פיתול ותחום קמירות וקעירות

$$f''(x) = \left[\frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2}\right]' = \frac{(4x+8)(x+2)^2 - (2x^2+8x)2(x+2)}{(x+2)^4} =$$

$$\frac{(x+2)[(4x+8)(x+2) - 2(2x^2+8x)]}{(x+2)^4} = \frac{[4x^2 + 16x + 16 - 4x^2 - 16x]}{(x+2)^3} =$$

$$\frac{16}{(x+2)^3}$$

x	$-\infty < x$	-2	$< x < \infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$

הפונקציה קמורה כאשר $x > -2$ וקעורה $x < -2$

ב $x = -2$ יש מעבר בין קמירות לקעירות ולכן היא נקודת פיתול.

ה.

אסמיפטוטות

אנכית – נקודה שבה לפחות אחד הגבולות החד צדדים שואף ל $\pm\infty$ (אי רציפות עיקרית)

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{2(x^2+2x+4)}{x+2} = \infty, \quad \lim_{x\to -2^-} \frac{2(x^2+2x+4)}{x+2} = -\infty$$

לכן $x = -2$ היא אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה משופעת

הישר $y = ax + b$ נקרא אסי׳ משופעת של $f(x)$ ב - $\pm\infty$ אם

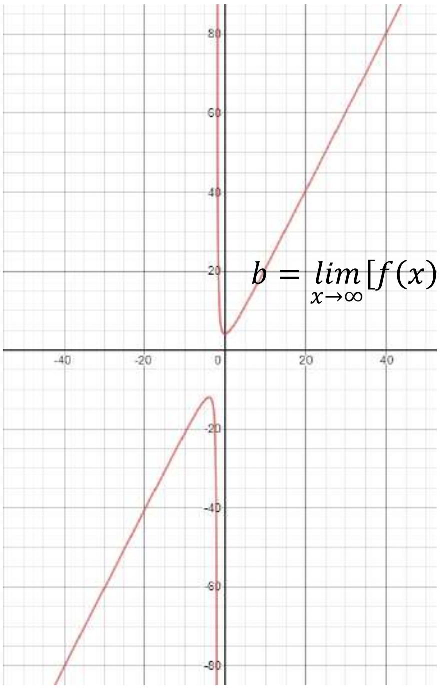
$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$$

את הפרמטרים נמצא ע״י :

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax]$$

בצורה דומה נחשב את האסי׳ המשופעת ב - $-\infty$.

בתרגיל שלנו :



$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2(x^2 + 2x + 4)}{x(x + 2)} = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax] = b = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2(x^2 + 2x + 4)}{(x + 2)} - 2x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{8}{(x + 2)} = 0$$

לסיכום $y = 2x$ היא האסימפטוטה המשופעת (באופן זהה היא גם ב $-\infty$).

ו.

שרטוט

2. חקרו את הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

פתרון

3. חקרו את הפונקציה $f(x) = [x^2(3-x)]^{\frac{1}{3}}$

פתרון

א. תחום ההגדרה : כל x (רציפה לכל x).

ב. חיתוך עם הצירים

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; [x^2(3-x)]^{\frac{1}{3}}=0 \;\rightarrow\; x=0,3 \rightarrow \;(0,0)(3,0)$$

$$x=0 \;\rightarrow f(0)=\;0 \;\rightarrow\; (0,0)$$

ג.

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\left(\frac{3-x}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3-x}\right)^{\frac{2}{3}}=$$
$$\frac{2(3-x)-x}{3\sqrt[3]{x(3-x)^2}}=\frac{6-3x}{3\sqrt[3]{x(3-x)^2}}=\frac{3(2-x)}{3\sqrt[3]{x(3-x)^2}}=\frac{2-x}{\sqrt[3]{x(3-x)^2}}$$

הנגזרת מתאפסת ב- $x=2$ ולא מוגדרת ב - $x=0,3$

x	$-\infty < x$	0	$< x <$	2	$< x <$	3	$< x < \infty$
$f'(x)$	$-$	לא קיים	$+$	0	$-$	לא קיים	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↘

תחום ירידה : $x<0, 2<x<3, 3<x$

תחום עליה : $0<x<2$

נקודות קיצון :

לכן $(0,0)$ היא נקודת מינימום מקומי

לכן $(2,\sqrt[3]{4})$ היא נקודת מקסימום מקומי

ד.

נקודת פיתול ותחום קמירות וקעירות

$$f''(x) = \left[\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}\right]' =$$

$$= -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{-\frac{5}{3}} =$$

$$= -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{9}x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{-\frac{5}{3}} =$$

$$= -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(3-x)^{-\frac{5}{3}}[(3-x)^2 + +2x(3-x) + x^2] = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(3-x)^{-\frac{5}{3}} \cdot 9$$

$$= -2x^{-\frac{4}{3}}(3-x)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{\sqrt[3]{x^4(3-x)^5}}$$

x	$-\infty < x$	0	$< x <$	3	$< x <$
$f''(x)$	$-$	לא קיים	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cap$		$\cup$

הפונקציה קעורה כאשר $x < 3$

הפונקציה קמורה כאשר $x > 3$

ב $x = 3$ יש מעבר בין קמירות לקעירות ולכן היא נקודת פיתול.

ה.

אסמיפטוטות

אנכית – f רציפה לכן אין אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה משופעת

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2(3-x)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{3x^2-x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{3-x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{3}{x}-1}=-1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{x^2(3-x)}+x\right]=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{x^2(3-x)}+x\right]\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x^2(3-x)}\right)^2-\left(\sqrt[3]{x^2(3-x)}\right)x+x^2}{\left(\sqrt[3]{x^2(3-x)}\right)^2-\left(\sqrt[3]{x^2(3-x)}\right)x+x^2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(3-x)+x^3}{\left(\sqrt[3]{x^2(3-x)}\right)^2-\left(\sqrt[3]{x^2(3-x)}\right)x+x^2}=$$

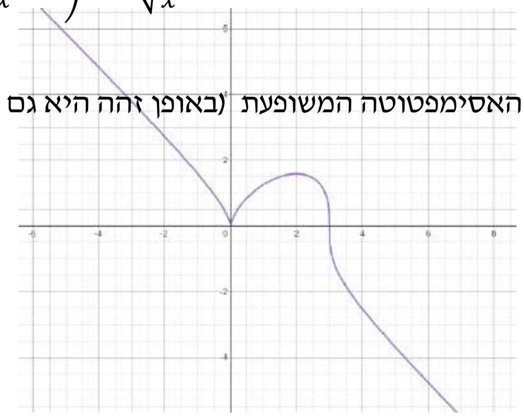
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{\left(\sqrt[3]{x^2(3-x)}\right)^2-\left(\sqrt[3]{x^2(3-x)}\right)x+x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}}{\frac{\left(\sqrt[3]{x^2(3-x)}\right)^2}{x^2}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^2(3-x)}\right)x}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\left(\frac{\sqrt[3]{x^2(3-x)}}{x}\right)^2-\frac{\left(\sqrt[3]{x^2(3-x)}\right)}{x}+1}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\left(\sqrt[3]{\frac{3x^2-x^3}{x^3}}\right)^2-\sqrt[3]{\frac{3x^2-x^3}{x^3}}+1}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\left(\sqrt[3]{\frac{3}{x}-1}\right)^2-\sqrt[3]{\frac{3}{x}-1}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1-(-1)+1}=1$$



לסיכום $y=x+1$ היא האסימפטוטה המשופעת (באופן זהה היא גם ב $-\infty$).

ו.

שרטוט

חיפוש מקסימום / מינימום גלובלי בקטע

רשימה של הנקודות החשודות כוללת:

- נקודות קיצון מקומיות
- נקודות אי רציפות
- נקודות בהן הנגזרת לא מוגדרת
- קצות הקטע

נשווה את ערכי הפונקציה בנקודות הללו, הנקודה בעלת הערך הגדול היא המקסימום והנקודה בעלת הערך הנמוך היא המינימום.

מצאו ערכי קיצון של הפונקציה $f(x)=3x^2-|x-1|$ בתחום $[0,5]$ באילו נקודות הם מתקבלים?

פתרון:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-x+1 & x\ge 1\\ 3x^2+x-1 & x<1\end{cases}$$

נקודות חשודות :

נקודות תפר - $x = 1$ (כולל נקודות בהן אולי הנגזרת לא מוגדרת) $\leftarrow (1,3)$

נקודות קצה - $x = 0,5$ $\leftarrow$ $(0,-1), (5,71)$

נקודות אי רציפות – אין

נקודות בהן $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x-1 & x \geq 1 \\ 6x+1 & x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{לא בתחום} & x \geq 1 \\ [0,5] - \text{לא ב} & x < 1 \end{cases}$$

לסיכום :

$$max\ (5,71), \qquad min\ (0,-1)$$

תרגיל

$f(x)$ גזירה ב - $[0,2]$ ומקיימת $f(0) = 1, f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = 8$ צ"ל שקיימת נקודה x_0 בקטע הנ"ל כך ש- $f'(x_0) = 0$.

פתרון

f רציפה, כי היא גזירה. ע"פ ויישטראס (פונקציה רציפה בקטע סגור) היא מקבלת מקסימום ומינימום בקטע.

הנקודות החשודות הן :

- קצות הקטע $x = 0,2$
- נקודות בהן הנגזרת מתאפסת.

הפונקציה גזירה ולכן אין נקודות בהן הנגזרת לא מוגדרת או נקודות אי רציפות.

מכיוון ש - $f(1)=\frac{1}{2}$ ולכן הקצוות $f(0)=1, f(2)=8$ לא יכולות להיות מינימום. לכן

המינימום הגלובלי יתקבל בנקודה בה $f'(x_0)=0$ ז"א שקיימת נקודה $x_0\in[0,2]$ בה הנגזרת

מתאפסת.

הוכח / הפרך

א. אם קיים גבול והוא סופי $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=2$ אזי $f(x)$ גזירה ב - a.

פתרון

אם הגבול קיים ז"א שהערך $L=2$ שווה משמאל ומימין, זה לא מספיק,

למשל: $f(x)=\begin{cases}2x & x<1\\ 2x+1 & x\geq 1\end{cases}$.

ב. אם f מוגדרת בסביבת a כולל הנקודה a עצמה וגזירה בסביבת a, פרט אולי לנקודה a ו –

$\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ אז f גזירה ב - $x=a$.

פתרון

לא, דוגמה נגדית: $f(x)=\begin{cases}x & x\neq 1\\ 5 & x=1\end{cases}$

כדי שהפונקציה תהיה גזירה בנקודה, הפונקציה צריכה להיות רציפה בנקודה וגם הנגזרות החד

צדדיות צריכות להיות שוות.

ג. אם f גזירה וזוגית אזי f' אי זוגית.

נכון, f זוגית ולכן:

$$f(x)=f(-x)$$

נגזור את צד שמאל:

$$[f(x)]' = 1 \cdot f'(x) = f'(x)$$

נגזור את צד ימין:

$$[f(-x)]' = -1 \cdot f'(-x) = -f'(-x)$$

נשווה את שני הצדדים

$$f'(x) = -f'(-x)$$

לכן $f'(x)$ פונקציה אי זוגית.

ד. אם f גזירה ועולה ממש אזי $f'(x) > 0$ לכל x.

לא, $f(x) = x^3$, הפונקציה עולה ממש אבל ב- $x = 0$ הנגזרת מתאפסת.

ה. אם $f(x)$ גזירה לכל x ומקיימת $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ אזי קיים מספר סופי L כך ש $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

לא, $f(x) = lnx$ הנגזרת מקיימת:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$$

אבל

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

ו. אם $f(x)$ גזירה לכל x ומקיימת $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ גבול סופי L אזי $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$

לא, $f(x) = \frac{1}{x} sin\,(x^2)$ מצד אחד:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

אבל הנגזרת מקיימת :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin(x^2) + \frac{1}{x}\cos(x^2)\cdot 2x = -\frac{1}{x^2}\sin(x^2) + 2\cos(x^2)$$

הביטוי הראשון שואף לאפס אבל לשני אין גבול

ז. אם $f(x)$ רציפה ב -0 וקיים גבול סופי $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = L$ אז $f(x)$ גזירה ב -0.

פתרון

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

מהנתון $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = L$ מתקבל שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש $\left|\frac{f(x)}{x^2} - L\right| < \varepsilon$ נבחר $\varepsilon = 1$

$$-1 < \frac{f(x)}{x^2} - L < 1$$

$$L - 1 < \frac{f(x)}{x^2} < L + 1$$

$$x^2(L-1) < f(x) < x^2(L+1)$$

נשאיף את $x \to 0$ ונקבל ממשפט הסנדוויץ' ש - $\lim_{x\to 0} f(0) = 0$.

נתון ש - $f(x)$ רציפה ולכן $\lim_{x\to 0} f(0) = 0 = f(0)$

נחזור להתחלה

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} h\frac{f(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h^2}$$

$$= 0\cdot L = 0$$

נגזרת של פונקציה הנתונה בצורה פרמטרית

פרמטריזציה של עקום במישור

$$r(t)=\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$

תהי

$$r(t_0)=\begin{cases}x=x(t_0)\\ y=y(t_0)\end{cases}$$

נקודה על העקום, נניח כי הפונקציות $x(t),y(t)$ גזירות ב - t_0 ו - $x'(t_0)\neq 0$ אז :

שיפוע העקום בנקודה (x_0,y_0) הוא :

$$y'(x_0)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dy}}\right|_{t=t_0}=\frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$$

כאשר $\dot{y}$ מסמן נגזרת של y לפי הפרמטר t.

ואם נרצה לחשב נגזרת שניה

$$y''(x_0)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\frac{d}{dt}(x)}=\frac{1}{\dot{x}}\cdot\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3}$$

תרגיל

המערכת

$$\begin{cases}x=t^3+4t-2\\ \quad y=cos(2t)\end{cases}$$

מגדירה פונקציה $f(x)$ לכל x.

הוכיחו הפריכו

א. $f(-2) = 0$

ב. $f(x)$ פונקציה חסומה

ג. המשיקים לפונקציה $y = f(x)$ בנקודות $x = 3, x = -7$ (דהיינו $t = \pm 1$) מקבילים זה לזה.

ד. $x = -2$ היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.

פתרון

א. לא נכון

$$\begin{cases} x(0) = -2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

לכן $f(-2) = 1$

ב. נכון, אם $y_0 = f(x_0)$ אז קיים t_0 כך ש –

$$\begin{cases} x = {t_0}^3 + 4t_0 - 2 \\ y = cos(2t_0) \end{cases}$$

ולכן לכל x_0 בתחום ההגדרה של $f(x)$ מתקיים

$$f(x_0) = y_0 = cos2t_0 \quad \rightarrow \quad |f(x_0)| \leq 1$$

ג. לא נכון, שיפוע המשיק הוא

$$y'(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{-2sin2t}{3t^2 + 4}$$

$$t = 1 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

$$y'(1) = \frac{-2sin2}{7}$$

$$t = -1 \quad \rightarrow \quad x = -7$$

$$y'(-1) = \frac{2sin2}{7}$$

השיפועים שונים ולכן המשיקים לא מקבילים.

ד. לא נכון,

$$x = -2 \quad \rightarrow \quad t = 0$$

$$f'(-2) = y'(-2) = \frac{-2sin0}{4} = 0$$

לכן היא נקודה קריטית, נבדוק את סיוגה ע״פ הנגזרת השניה

$$y''(x_0) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3} = \frac{-4(3t^2+4)cos2t - 2sin2t \cdot 6t}{(3t^2+4)^3}$$

$$y''(-2) = \frac{-16-0}{4^3} = -\frac{1}{4} < 0$$

ולכן זאת נקודת מקסימום מקומי.

שאלות ממבחנים

.1

הוכיחו כי אם f, g פונקציות גזירות בקטע $[a, b]$ ומקיימות

$$f(a) = g(a), f(b) = g(b), \ \ \forall a \le x \le b \ f'(x) \le g'(x)$$

אז $\forall a \le x \le b \ \ f(x) = g(x)$.

פתרון

תהי $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ רציפה המקיימת

$$f(0)=0,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=L>0$$

אזי קיים $x_1>0$ כך ש - f מונוטונית עולה בקרן (x_1,∞).

הטענה לא נכונה.

.3

מספר הפתרונות של המשוואה $lnx+arctan(x)-x+1=0$ בקרן $(0,\infty)$ הוא ?

א. 1 ב. 4 ג. 3 ד. 2 ה. 0

פתרון

.4

נתון כי למשוואה $2x^3 + 3x^2 - 12x + 5 = a$ יש בדיוק 2 פתרונות. מה מהבאים ערך אפשרי ל – a?

א. -19 ב. 12 ג. 0 ד. -8 ה. 25

פתרון

.5

הוכיחו עי אם f, g פונקציות גזירות בקטע $]a, b[$ אז קיימת נקודה $a < c < b$ כך שמתקיים

$$g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(c)(g(b) - g(a))$$

פתרון

.6

תהי $f: R \to R$ המוגדרת ע"י $f(x) = ln(1 + e^x) - x + sinx$. מהי הטענה הנכונה?

א. $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

ב. למשוואה $f(x) = 0$ יש אינסוף פתרונות.

ג. $\lim_{x \to \infty} f'(x) = \infty$

ד. למשוואה $f(x) = 0$ אין פתרון.

ה. הפונקציה $f(x)$ היא על.

פתרון

.7

יהיו f, g פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$ וגזירות בקטע (a, b) כך ש –

$$f(a) = g(a), f(b) = g(b)$$

אזי קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש - $f'(c) = g'(c)$

הטענה נכונה

שאלות חזרה

1. תהי $f(x)$ פונקציה הגזירה לכל x ומקיימת בקטע $[-1,1]$

$$f'(x) \leq sin(\pi x), \qquad f(-1) = f(1) = \frac{1}{\pi}$$

הוכיחו $f(x) = -\frac{cos(\pi x)}{\pi}$ בקטע $[-1,1]$.

2. הוכיחו כי לכל $x > 0$

$$x^2 + x > log(x + 1)$$

תשובה : 2 שורשים.

3. מצאו כמה שורשים יש לפונקציה $\frac{x^2}{2} - 2 + cos\, x$

תשובה : 2 שורשים.

4. כמה שורשים יש לפונקציה $f(x) = 8x^2 - ln(1 + x^2) - cos(2x)$

א. בדיוק שנים ב. בדיוק שלושה ג. בדיוק אחד ד. אין שורשים ה. בדיוק ארבעה

תשובה נכונה: א.

5.

א. תהי $h(x)$ פונקציה מוגדרת וגזירה על הקטע $[a, b]$.

נתון

- $h(a) = h(b) = 0$
- $h'(x) \geq 0$ לכל x בקטע $[a, b]$

הוכיחו כי $h(x) = 0$ לכל x בקטע $[a, b]$.

ב. תהיינה $f(x), g(x)$ פונקציות המוגדרות וגזירות בקטע $[a, b]$.

הוכיחו כי אם

- $f(a) = g(a)$
- $f(b) = g(b)$
- $f'(x) \leq g'(x)$ לכל x בקטע $[a, b]$,

אזי $f(x) = g(x)$ בכל הקטע $[a, b]$.

6. הביאו דוגמא מפורשת לפונקציה המוגדרת ורציפה על $[0,10]$, המקיימת

$f(0) = f(10)$ ואינה מקיימת את <u>מסקנת</u> משפט רול עצמו.

7.

א. הוכיחו לכל $x < y$ מתקיים

$$sin\, y - sin\, x \leq y - x$$

ב. הראו כי $\sqrt{3} - \sqrt{2} \leq \frac{\pi}{6}$

8.

הוכיחו כי $ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ לכל $0 \leq x$.

9. כמה פתרונות יש למשוואה

$$x^3 + 3x^2 - 9x = -4$$

תשובה: 3 שורשים.

10. למשוואה $2\,ln(x) - x^2 + 2 = 0$ יש בדיוק שני פתרונות בתחום $x > 0$

הטענה נכונה.

.11

תהא $f(x) = |log(x^2 + 1)| + x$. האם יש לפונקציה מינימום ומקסימום מוחלטים בקטע $[-e, e]$? אם יש הסבירו למה ומצאו אותם. אם אין, הסבירו למה.

תשובה: יש

.12

הוכיחו כי $1+x\le e^x\le 1+xe^x$ לכל x ממשי.

.13

צטטו והוכיחו את משפט פרמה.

.14

יהיו f,g פונקציות גזירות בקטע $[a,b]$. הוכיחו כי קיים $a<c<b$ עבורו מתקיים

$$g'(c)\big(f(b)-f(a)\big)=f'(c)\big(g(b)-g(a)\big)$$

.15

מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה

$$x^2 = 3 - e^{-x^2}$$

תשובה: 2 פתרונות.

.16

לפונקציה $f(x) = x^4 + x^2 + sin(x)$ כמה שורשים למשוואה?

א. 2 ב. 3 ג. 1 ד. אין שורשים ה. 4

תשובה נכונה: א.

.17

אם f פונקציה רציפה ומתקיים $f''(x) > 0$ לכל x אז לפונקציה $f(x)$ יש לכל היותר נקודת מינימום אחת (בתחום פתוח).

הטענה נכונה

.18

הוכיחו כי $\frac{x}{1+x^2} \geq arctg(x)$ לכל $x \geq 0$

.19

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ברציפות, אם $f''(x) > 0$ וגם $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 8$, $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -1$ אז

ל-$f(x)$ יש נקודת מינימום יחיד

הטענה נכונה

.20

תהי $f(x)$ מוגדרת וגזירה על כל הישר.

נתון כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה 0 חותך את גרף הפונקציה בנקודה נוספת $b > 0$.

הוכיחו כי $f'(x)$ אינה חח״ע.

שאלות נוספות

.1

הראו כי למשוואה $1 + tan^2 x + x^4 = 9$ קיים שורש ממשי יחיד בקטע $\left(\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$

.2

נתונה פונקציה$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f(x) = e^x + x^3 + 5$.

- הוכיחו כי הפונקציה הנתונה חח"ע בכל $\mathbb{R}$.
- הוכיחו כי לכל מספר ממשי $c \in \mathbb{R}$ קיים פתרון למשוואה: $e^x + x^3 + 5 = c$.
- מצאו את פתרון המשוואה $e^x + x^3 + 5 = e + 6$. כמה פתרונות מצאתם? הסבירו מדוע.
- הסיקו על סמך הסעיפים הקודמים כי הפונקציה הנתונה הפיכה בכל$\mathbb{R}$ (נמקו!) וחשבו את הנגזרת של הפונקציה ההפוכה $f^{-1}(y)$ בנקודה $y = e + 6$.

.3

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע $(1,10)$ כך שמתקיים:

$$f(2) = -5, \quad f(5) = 5, \quad f(9) = -5.$$

איזו מהטענות הבאות בהכרח מתקיימת:

I. למשוואה $f(x) = 0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע $(1,10)$.

II. לגרף הפונקציה $f(x)$ יש משיק אופקי.

III. קיימת נקודה $2 < c < 5$ כך ש- $f(c) = 3$.

א- אף אחת ב. כולן ג. רק I ד. רק I ו-II ה. רק I ו-III

תשובה נכונה: ב.

.4

נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא פולינום ממעלה $n \geq 2$ ומתקיים: $f(1) = f(6) = 2$.

איזו מהטענות הבאות בהכרח מתקיימת:

קיימת נקודה $-\infty < x < \infty$ כך ש- $f(x) = 0$.

קיימת נקודה $1 < x < 6$ כך ש- $f'(x) = 0$.

קיימת נקודה $1 < x < 6$ כך ש- $f''(x) = 0$.

א. אף אחת ב. כולן ג. רק I ד. רק II ה. רק I ו-II

תשובה נכונה: ד.

.5

x_0 נקראת נקודת שבת של $f(x)$ אם $f(x_0) = x_0$.

תהי $f(x)$ מוגדרת וגזירה בכל $\mathbb{R}$ ו- $f'(x) > 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$, הוכיחו ל-$f(x)$ יש לכל היותר נקודת שבת אחת

.6

הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים: $\frac{x}{1+x^2} < arctan\, x < x$.

.7

תהי $f(x)$ גזירה בכל $\mathbb{R}$ ומתקיים: $f(1) = 4$ ו- $x < f'(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

איזו מהטענות הבאות בְּהֶכְרֵחַ נכונה?

א. $f(2) = 7$ ב. $f(5) = 15$ ג. $f(5) > 10$ ד. $f(3) > 6$ ה. $f(3) = 8$

תשובה נכונה: ד.

.8

תהי $f(x)$ גזירה לכל x ממשי אם מתקיים $f(-3) = -3$, $f(3) = 3$ ו-$f'(x) \leq 1$ לכל x ממשי אזי בהכרח $f(0) = 0$.

הטענה נכונה

.9

הוכיחו כי לכל $1 \leq a < b \leq e$ מתקיים

$$b - a \;\leq\; b^2 \ln b - a^2 \ln a \;\leq\; 3e(b-a)$$

.10

הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים

$$\frac{x}{4x^2+1} < \arctan(2x) - \arctan x < \frac{x}{x^2+1}$$

שאלות חזרה בנושא חקירת פונקציות

.1

$$\forall x > 0 , \quad ln\, x \le \frac{x}{e}$$

הטענה נכונה

.2

כמה פתרונות שונים למשוואה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2 = a$ עבור הערך $a = 3$?

תשובה : 3 פתרונות

כמה פתרונות שונים למשוואה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2 = a$ עבור הערך $a = 2.5$?

תשובה : 4 פתרונות

.3

נקודת פיתול לא יכולה להיות נקודת קיצון מקומי.

הטענה לא נכונה

.4

הוכיחו כי $x\frac{2}{\pi} \geq sin(x)$ בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

.5

מצאו את כל נקודות המקסימום של $f(x) = |x^3 - 6x^2 + 9x - 3|$ בקטע $[0,4]$

רמז: חקרו את $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

תשובה: $f(0) = f(3) = 3$

שאלות נוספות

.1

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים, מונוטונית יורדת וקמורה בכל $\mathbb{R}$. אזי $f(ln\, x)$ קמורה בקטע $(0, \infty)$

.

הטענה נכונה

.2

אם a היא נקודת קיצון מקומי של הפונקציה $f(x)$ אז בהכרח a אינה נקודת פיתול של הפונקציה.

הטענה לא נכונה

.3

אם הישר $y = ax + b$ הוא אסימפטוטה משופעת ב∞ של הפונקציה $f(x)$ וגם של הפונקציה $g(x)$,

אזי הישר $y = ax + b$ הוא אסימפטוטה משופעת ב∞ גם של הפונקציה $f(x) + g(x)$.

הטענה לא נכונה

.4

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)\,sin\left(\frac{1}{1-x}\right) & x<1\\ 1 & x=1\\ \frac{1}{x-1}sin(x-1) & x>1\end{cases}$$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. $f(x)$ רציפה בנקודה $x=1$.

ב. $x=1$ היא נקודת אי-רציפות עיקרית של $f(x)$.

ג. $x=1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של $f(x)$.

ד. $f'_+(1)=0$.

ה. הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה אופקית של $f(x)$ ב - $-\infty$

תשובה נכונה : ד.

.5

תהי $f(x) = ln(1 + e^{-x}) + x$.

א. $f(x)$ יורדת ב- $(-\infty,\ \infty)$.

ב. קיימת נקודה x_0 כך ש- $f'(x_0) = 2$.

ג. שני הגבולות $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ו- $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ קיימים וסופיים.

ד. f קמורה $\cup$ בקטע $(-\infty,\ \infty)$.

ה. f חסומה מלמעלה בקטע $(-\infty,\ \infty)$.

ו. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

תשובה נכונה: ד.