אינטגרל מסוים

.1

המשפט היסודי

תהי

$$F(x) = \int_{1}^{\ln(e+x)} \sqrt{\frac{e^{-2t}}{1 - e^{-4t}}}\,dt$$

פונקציה המוגדרת לכל $0 \geq x$. חשבו את $F_+'(0)$ לפי הגדרת הנגזרת וקבעו האם היא קיימת.

פתרון

.2

חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{x^3}^{x^4} \cos(t^2)dt}{\int_{0}^{x^3} \left(1 + \sin(t^2)\right)dt}$$

פתרון

.1

חשבו את האינטגרל

$$\int_{-2}^{1}\left|arctan\sqrt[3]{x}\right|dx =$$

פתרון

.2

חשבו את השטח הכלוא בין העקומות $x=-\frac{1}{2}, x=-1, y=ln(-x)\,, y=\frac{1}{\sqrt{2^x+1}}$

פתרון

.3

$$\int_{4}^{9}xarctan\sqrt{x}dx =$$

פתרון

4.

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{1} |x|^3 arctanxdx =$$

פתרון

1.

חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{2x}\left(e^{3t^2}-1\right)dt}{x^3}$$

פתרון

2.

תהי

$$f(x) = \int_{x}^{2x} \frac{u}{2+u^4} du$$

מהי הטענה הנכונה?

א. $f(x)$ פונקציה זוגית.

ב. $f(x)$ פונקציה אי זוגית.

ג. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

ד. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

פתרון

.3

תהי

$$f(x) = 2x + \int_{2x}^{x^2} cos(t^2)dt$$

מהי הטענה הנכונה?

א. $x = 0$ היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.
ב. $x = 0$ היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.
ג. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2} = 2$
ד. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

פתרון

.4

חשבו את האינטגרל הבא

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{1+\sqrt{sinx}}dx =$$

.5

חשבו את האינטגרל

$$\int_0^2 x^3 e^{x^2} dx =$$

.6

נתונה $h(x)$ פונקציה חיובית וגזירה פעמיים המקיימת :

$$\int_0^1 h(x)dx = 5$$

$$h(1) = 7$$

חשבו את

$$\int_0^1 xh'(x)dx$$

פתרון

.1

מצאו את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x) = xe^x$, $f(x) = e^x$ והישר $x = 0$.

פתרון

.2

חשבו את האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{x - \sqrt{arctanx}}{1 + x^2} dx$$

פתרון

.3

חשבו את האינטגרל

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

פתרון

.4

נתונים שלוש פונקציות $0 < a < 4$ $y=\frac{1}{x}, y=4x, y=ax,$ מצאו את a כך ששטח התחום בין הגרפים של שלושת הפונקציות הנ״ל ברביע הראשון שווה $\frac{1}{2}$.

פתרון

.5

הוכיחו כי לפונקציה

$$x>0, \qquad F(x)=\int_0^{x^2} \frac{sin(\sqrt{t})}{t}\,dt$$

יש מקסימום מקומי ב - $x=\pi$.

פתרון

.6

נתונה הפונקציה $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ מצאו תחומי עליה וירידה ותחומי קמירות וקעירות של $F(x)$.

פתרון

.1

חשבו את האינטגרל

$$\int_0^e ln(x+1)\,dx=$$

פתרון

.2

נתון

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=0,\qquad \int_2^5 f(x)dx=4,\qquad \int_2^5 g(x)dx=6$$

הפונקציות f,g רציפות לכל x.

קבעו האם הטענות הבאות נכונות.

טענה 1 - $\int_2^5 g(-x)dx=6$

טענה 2 - הפונקציה f היא פונקציה אי זוגית.

טענה 3 - $\int_4^7 g(x-2)dx=4$

.3

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\int_{1}^{e^x}\frac{2lnt}{t}dt$$

א. חשבו את $f'(x)$
ב. מצאו את $f(0)$
ג. מצאו ביטוי נוסף ל - $f(x)$

פתרון

.4

חשבו את האינטגרל

$$\int_{-3}^{3}(x+5)\sqrt{9-x^2}dx=$$

פתרון

.5

הוכיחו כי הפונקציה

$$f(x)=sinx+1+\int_{x}^{\pi}cos2tdt$$

מקיימת א) $f''=-sinx+2sin2x$ ב) $f(\pi)=1, f'(\pi)=-2$

פתרון

.6

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x sin(t^2)dt}{sin^3 x}=$$

.7

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\int_2^x \frac{t}{1+t^2}dt$$

נגדיר פונקציה חדשה $g(x)=e^{f(x)}$

חשבו את $g'(2)$.

פתרון

.8

נתונה הפונקציה

$$f(x)=x^2+\int_1^x \frac{dt}{t}$$

א. הוכיחו כי הפונקציה

1) היא פונקציה זוגית 2) $f(1)=1, f'(1)=3$

פתרון

.1

מצאו נקודות קיצון של הפונקציה

$$f(x) = \int_0^x (t+1)(t-1)^2 dt$$

פתרון

.2

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x^3+x)}{x^4+1} dx = 0$$

.3

נתונה הפונקציה

$$f(t) = \begin{cases} [t] & x \le e \\ \dfrac{1}{t \cdot \ln^2 t} & e < x \end{cases}$$

נגדיר

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

א. חשבו את $F(e^2)$

ב. האם האינטגרל $\int_e^\infty f(t)dt$ מתכנס?

פתרון

.4

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x lnt dt}{\int_0^{sinx}\frac{1}{t}dt}$$

פתרון

.5

תהיינה f, g פונקציות גזירות בקטע $[a,b]$ המקיימות $f(a)=g(a)$ ו - $f'(x)\geq g'(x)$

לכל $x\in[a,b]$. הוכיחו כי

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$$

פתרון