



רוז ולגרנז'

.1

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע I וגזירה בכל הנקודות הפנימיות של I .
הוכיחו שאם $f'(x) < 0$ בכל הנקודות הפנימיות של I אז $f(x)$ מונוטונית יורדת ממש בקטע I .
פתרון

.2

הוכיחו כי למשוואה $\ln^3 x - 3 \ln x = -1$ קיימים לכל היותר 3 פתרונות ממשיים חיוביים.
פתרון

.1

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[-1, 2]$ וגזירה בקטע הפתוח $(-1, 2)$. מתקיים
 $f(-1) = 5, f(2) = 16$ ו- $f'(x) < 4 \forall -1 < x < 2$ הוכיחו כי $8 < f(0) < 9$.
פתרון

.1

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בכל נקודה. נתון שקיימת נקודה c בקטע (a, b) כך ש –

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

הוכיחו כי קיימת נקודה x_0 בקטע (a, b) כך ש $f''(x_0) = 0$.

פתרון

.2

א. תהי

$$f(x) = \frac{x}{3 + x^4}$$

מצאו $x_0, x_1 \in R$ כך שלכל $x \in R$ מתקיים $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

ב. תהי $g(x)$ גזירה בכל R המקיימת $g' = \frac{4x \cdot \cos x}{3 + x^4}$

הוכיחו שלכל $a, b \in R$ מתקיים $|g(b) - g(a)| \leq |b - a|$

פתרון

.1

נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - a$ כאשר $a \in R$. עבור אילו ערכים של a הפונקציה חותכת את ציר ה- x בשלוש נקודות.

פתרון

.2

הוכיחו כי $\arctan x < x$ לכל $x > 0$.

פתרון

.3

הוכיחו כי $\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$ לכל $x > 1$.

פתרון