$$y_2 = v(x)e^{-2x} = e^{-2x}(c_1x + c_2)$$

והפתרון הכללי של המשוואה הוא:

$$\boldsymbol{y = c_1y_1 + c_2y_2 = ce^{-2x} + e^{-2x}(c_1x + c_2) = \alpha e^{-2x} + \beta xe^{-2x}}$$

משוואות ליניאריות מסדר n עם מקדמים קבועים – משוואות הומוגניות

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

נחפש פתרונות מהצורה $y(x) = e^{rx}$, הנגזרות תהיינה: $y^{(i)}(x) = r^ie^{rx}$ הצבה במשוואה תיתן:

$$e^{rx}(a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2} + \cdots a_1r + a_0) = 0$$

הביטוי $a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2} + \cdots a_1r + a_0$ נקרא הפולינום האופייני (הפ"א) של המד"ר.

מציאת הפתרונות של הפ"א תוביל אותנו לפתרון המד"ר.

מקרה א – n שורשים ממשיים ושונים $r_1, r_2 \dots, r_n$

שורשי הפ"א	צורת הפתרון
n שורשים ממשיים ושונים $r_1, r_2 \dots, r_n$	$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \cdots + c_ne^{r_nx}$

דוג' 1

מצאו פתרונות של המד"ר הבאה: $y'' + 5y' + 6y = 0$

פתרון

הפ"א של המד"ר: $r^2 + 5r + 6 = 0$ שורשי הפ"א הם $r_1 = -2, r_{2=} - 3$ מכאן שפתרון המד"ר הוא:

$$\boldsymbol{y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}}$$

מקרה ב – n שורשים מרוכבים ושונים $r_1, r_2 \ldots, r_n$

שורשי הפ״א	צורת הפתרון
n שורשים מרוכבים ושונים $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \ldots, r_n = \alpha_n + i\beta_n$	$y(x) = c_1e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x) + c_2e^{r_2 x}\sin(\beta_1 x)$ $+\cdots$ $+c_n e^{\alpha_n x}\cos(\beta_n x) + c_n e^{\alpha_n x}\sin(\beta_n x)$

דוג' 2

מצאו פתרונות של המד״ר הבאה : $y^{(5)} - y' = 0$

פתרון

הפ״א של המד״ר : $0 = r^5 - r$

$$r(r^4 - 1) = r(r^2 - 1)(r^2 + 1)$$

שורשי הפ״א הם $r_1 = 0, r_{2=}1, r_3 = -1, r_4 = i, r_5 = -i$ מכאן שפתרון המד״ר הוא :

$$y(x) = c_1e^{0x} + c_2e^{x} + c_3e^{-x} + c_4e^{0x}cosx + c_5e^{0x}sinx$$

$$\boldsymbol{y(x) = c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x} + c_4cosx + c_5sinx}$$

מקרה ג – n שורשים עם ריבוי S

שורשי הפ״א	צורת הפתרון
שורשים מריבוי S $r_1 = \cdots, r_s = c$	$y(x) = c_1e^{cx} + c_2xe^{cx} + \cdots + c_nx^{s-1}e^{cx}$

הערה : כנ״ל נפתור עבור שורשים מרוכבים

דוג' 3

מצאו פתרונות של המד״ר הבאה : $y^{(4)} + 6y^{(3)} + 13y'' + 12y' + 4y = 0$

פתרון

הפ״א של המד״ר : $0 = r^4 + 6r^3 + 13r^2 + 12r + 4 = 0$

תזכורת (מציאת שורשים לפולינום):

1. אם לפולינום עם מקדמים רציונליים קיים שורש רציונלי $\frac{p}{q}$ אזי p מחלק את המקדם המוביל (אצלנו 1) ו q מחלק את המקדם החופשי (אצלנו 4).
2. אם שורש מסוים הוא מריבוי S , אזיי הוא מאפס את הפולינום ואת נגזרותיו עד לנגזרת מסדר $s-1$

במקרה שלנו האפשרויות הם: $\pm1,\ \pm2,\ \pm4$

הצבה בפ"א של $-1,-2$ מגלה שהם שורשים של הפולינום. הצבתם בנגזרת מגלה שהם מאפסים גם את הנגזרת. ולכן ארבעת השורשים של הפולינום הם: $-1,-1,-2,-2$

מכאן שפתרון המד"ר הוא:

$$\boldsymbol{y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3e^{-2x} + c_4xe^{-2x}}$$

לסיכום

שורשי הפ"א	צורת הפתרון
n שורשים ממשיים ושונים $r_1, r_2 \dots, r_n$	$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \cdots + c_ne^{r_nx}$
n שורשים מרוכבים ושונים $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \dots, r_n = \alpha_n + i\beta_n$	$y(x) = c_1e^{\alpha_1x}\cos(\beta_1x) + c_2e^{r_2x}\sin(\beta_1x) + \cdots$ $+c_ne^{\alpha_nx}\cos(\beta_nx) + c_ne^{\alpha_nx}\sin(\beta_nx)$
שורשים מריבוי S $r_1 = \cdots, r_s = c$	$y(x) = c_1e^{cx} + c_2xe^{cx} + \cdots + c_nx^{s-1}e^{cx}$

דוגמאות מסכמות

דוג' 1

מצאו ביטוי כללי לפתרון ההומוגני של המשוואה:

$$(y^{(6)}-y)(y^{(7)}+2y^{(5)}+y^{(3)})=\frac{x^2+5x+2}{lnx}$$

פתרון

הפ"א של המשוואה ההומוגנית הוא:

$$0=(r^6-1)(r^7+2r^5+r^3)=(r^6-1)r^3(r^4+2r^2+1)=(r^6-1)r^3(r^2+1)^2$$

לפ"א יש א) שורש 0 מריבוי 3.

ב) $r=\pm i$ מריבוי 2.

ג) 6 שורשים מריבוי 1 הפותרים $r^6=1$ (שורשי היחידה מסדר 6).

לפי דה מואבר: $r^6=cis(0)\ \rightarrow r=cis\left(\frac{0+2\pi K}{6}\right), K=0,1,\dots,5$

$$r_0=cis(0)=1, r_1=cis\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, r_2=cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$r_4=cis(\pi)=-1, r_5=cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, r_5=cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

ומכאן הביטוי הכללי לפתרון של החלק ההומוגני של המשוואה הוא:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}&=\boldsymbol{c_{11}+c_{12}x+c_{13}x^2+c_{21}cosx+\overline{c_{21}}xcosx+c_{22}sinx}\\&\boldsymbol{+\overline{c_{22}}xsinx+c_{31}e^x+c_{32}e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}\\&\boldsymbol{+c_{33}e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_{34}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}\\&\boldsymbol{+c_{35}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_{36}e^{-x}}\end{aligned}$$

דוג' 2

מצאו משוואה מסדר 3 מנורמלת עם מקדמים קבועים כל ש sin2x פתרון שלה וכל פתרונותיה חסומים לכל x.

פתרון

פתרון של המשוואה מורכב משורשים של הפ"א, שורש של הפ"א נראה $\alpha + i\beta$ והוא תורם למשוואה פתרון מהצורה $e^{\alpha x}\cos(\beta x) + e^{\alpha x}\sin(\beta x)$. יתכן שאחד החלקים (הממשי או המדומה) מתאפס, או שניהם מתאפסים.

החלק בפתרון ששייך לזווית חסום ולכן נסתכל על האקספוננט:

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha > 0 & \lim\limits_{x\to\infty} e^{\alpha x} \to \infty & \text{לא חסום} \\ \alpha = 0 & e^{\alpha x} = 1 & \text{חסום} \\ \alpha < 0 & \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\alpha x} \to \infty & \text{לא חסום} \end{array}\right\}$$

לסיכום, במקרה וקיים שורש: $r = \alpha + i\beta$

- אם $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ הפתרון לא חסום, למשל: $e^{2x}\cos(7x), e^{-3x}\sin(4x)$
- אם $\alpha \neq 0,\ \beta = 0$ הפתרון לא חסום, למשל: e^{4x}, e^{-x}
- אם $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$ הפתרון חסום, למשל: $\cos(3x), \sin(5x)$

נחזור לתרגיל שלנו:

אם $\sin(2x)$ הוא פתרון ז"א ש $r = \pm 2i$ ולכן גם $\cos(2x)$ פתרון ושניהם פתרונות חסומים.
השורש השלישי ממשי (כי אחרת היה מגיע עם הצמוד שלו ואז היינו מקבלים משוואה מסדר 4).
ראינו שהפתרון הממשי היחיד שחסום מתקבל עבור $r = 0$. ומכאן שהפ"א המתאים למשוואה הוא:

$$0 = r(r^2 + 4) = r^3 + 4r$$

ולכן המד"ר המתאימה היא:

$$y^{(3)} + 4y' = 0$$

דוג' 3

נתונה המשוואה עם מקדמים קבועים:

$$y^{(6)} + a_5 y^{(5)} + a_4 y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

ידוע כי $y_1 = x, y_2 = xcosx$ הם פתרונות המשוואה. מצאו את מקדמי המשוואה.

פתרון :

שורש של פ״א הוא מהצורה : $\mathrm{x}^{s-1}e^{\mathrm{ax}}\sin(bx)$ או $\mathrm{x}^{s-1}e^{\mathrm{ax}}\cos(bx)$ כאשר s הוא ריבוי של השורש בפ״א.

במקרה שלנו :

$$y_1 = x = \mathrm{x}^{2-1}e^{0x}\cos(0x)$$

ז״א ש $\mathrm{r} = 0$ הוא פתרון מריבוי 2.

$$y_2 = xcosx = \mathrm{x}^{2-1}e^{0x}\cos(1x)$$

ז״א $\mathrm{r} = i$ הוא שורש מריבוי 2. אבל אז גם הצמוד שלו $\mathrm{r} = -i$ הוא שורש מריבוי 2.

מצאנו את כל 6 השורשים. ולכן הפ״א הוא :

$$0 = \mathrm{r}^2(\mathrm{r}+\mathrm{i})^2(\mathrm{r}-\mathrm{i})^2 = r^2(r^2+1)^2 = r^2(r^4+2r^2+1) = r^6+2r^4+r^2$$

והמד״ר המתאימה : $y^{(6)} + 2y^{(4)} + y^{(2)} = 0$

ומכאן המקדמים הם :

$$a_5 = 0, \qquad a_4 = 2, \qquad a_3 = 0, \qquad a_2 = 1, \qquad a_1 = a_0 = 0$$

פתרונות וידאו
מלאים באתר

פתרון משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים – השוואת מקדמים

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

שלב ראשון נפתור את המשוואה ההומוגנית.

שלב שני נציע פתרון בצורה הדומה ל $g(x)$.

מקרה א – $\mathbf{g(x)}$ פולינום

$g(x)$	נציע פתרון מהצורה
$p_n(x)$	$x^s a_n(x)$ S – הריבוי של 0 כשורש של הפ״א $a_n(x)$ – פולינום כללי בדרגה של $g(x)$

דוג׳ 1

מצאו פתרונות של המד״ר הבאה: $y'' + y' + y = x^2$

פתרון

שלב ראשון נתחיל מהמשוואה ההומוגנית: $y'' + y' + y = 0$

הפ״א הוא $r^2 + r + 1 = 0$ שורשי הפולינום הם: $r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

מכאן נקבל שפתרון המשוואה ההומוגנית הוא:

$$\boldsymbol{y_h = c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

שלב שני פתרון המשוואה הלא הומוגנית – היות ו $g(x) = x^2$ נציע פתרון שהוא פולינום מדרגה שניה: $y_p = ax^2 + bx + c$. היות ו 0 הוא לא שורש של הפ״א הצעת הפתרון תשאר $ax^2 + bx + c$ (אנחנו מכפילים ב x^0).

נגזור את הפתרון ונציב במד״ר המקורית: $y_p' = 2ax + b, y_p'' = 2a$

$$y'' + y' + y = x^2$$

$$2a + 2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2$$

נשווה את מקדמי החזקות של x בשני צדי המשוואה:

$$\left.\begin{array}{ll} x^0: & 2a+b+c=0 \\ x^1: & 2a+b=0 \\ x^2: & a=1 \end{array}\right\} a=1, b=-2, c=0$$

ומכאן הפתרון הפרטי הוא: $y_p = x^2 - 2x$.

לסיכום הפתרון הכללי של המשוואה הוא:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x^2 - 2x$$

מקרה ב - $g(x)$ פולינום כפול אקספוננט

$g(x)$	נציע פתרון מהצורה
$e^{\alpha x}p_n(x)$	$x^s e^{\alpha x} a_n(x)$ S – הריבוי של α כשורש של הפ"א

דוג' 2

מצאו פתרונות של המד"ר הבאה: $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$

פתרון

נתחיל מהמשוואה ההומוגנית: $y'' - 4y' + 4y = 0$

הפ"א הוא $(r-2)^2 = r^2 - 4r + 4 = 0$ יש לנו שורש $r = 2$ מריבוי 2.

מכאן נקבל שפתרון המשוואה ההומוגנית הוא:

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

<u>שלב שני</u> פתרון המשוואה הלא הומוגנית – היות ו $g(x) = xe^{2x}$ נציע פתרון שהוא פולינום מדרגה ראשונה כפול האקספוננט: $y_p = x^2(ax+b)e^{2x}$. נשים לב שהיות ו2 הוא שורש של הפ"א לכן הכפלנו ב x^2.

נגזור את הפתרון:

$$y_p = x^2(ax+b)e^{2x} = e^{2x}(ax^3+bx^2)$$

$$y_p{}' = e^{2x}(2ax^3+2bx^2+3ax^2+2bx)$$

$$y_p'' = e^{2x}\left(4ax^3+4bx^2+6ax^2+4bx+6ax^2+4bx+6ax+2b\right)$$
$$= e^{2x}(4ax^3+4bx^2+12ax^2+8bx+6ax+2b)$$

נציב במד״ר המקורית:

$$y''-4y'+4y = xe^{2x}$$

$$e^{2x}(4ax^3+4bx^2+12ax^2+8bx+6ax+2b)$$
$$-4e^{2x}(2ax^3+2bx^2+3ax^2+2bx)$$
$$+4e^{2x}(ax^3+bx^2) = xe^{2x}$$

נחלק באקספוננט ונעשה השוואת מקדמים:

$$\left.\begin{array}{ll} x^0: & 2b=0 \\ x^1: & 8b+6a+2b=1 \\ x^2: & 4b+12a-8b-12a+4b=0 \end{array}\right\} a=\frac{1}{6}, b=0$$

$$x^3: \quad 4a-8a+4a=0$$

לסיכום הפתרון הפרטי:

$$.y_p = \frac{1}{6}e^{2x}x^3$$

והפתרון הכללי של המשוואה:

$$y = y_h + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{6}e^{2x}x^3$$

מקרה ג - g(x) היא פולינום כפול אקספוננט כפול sin או cos

נציע פתרון מהצורה	$g(x)$
$x^s e^{\alpha x}[a_n(x)\sin(\beta x)+b_n(x)\sin(\beta x)]$ S – הריבוי של $\alpha+\mathrm{i}\beta$ כשורש של הפ״א	$e^{\alpha x}p_n(x)\sin(\beta x), e^{\alpha x}p_n(x)\cos(\beta x)$

דוג' 3

מצאו פתרונות של המד"ר הבאה: $y''' - y' = 2\sin(x)$

פתרון

נתחיל מהמשוואה ההומוגנית: $y''' - y' = 0$

הפ"א הוא $r(r^2-1) = r^3 - r = 0$ שורשי הפ"א: $r = 0,1,-1$.

מכאן נקבל שפתרון המשוואה ההומוגנית הוא:

$$y_h = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$$

<u>שלב שני</u> פתרון המשוואה הלא הומוגנית – היות ו $g(x) = 2\sin(x)$ נציע פתרון שהוא פולינום מדרגה אפס כפול שילוב של sin ו cos: $y_p = acos(x) + bsin(x)$. (i ולא שורש של הפ"א ולכן לא צריך להכפיל בחזקה של x).

נגזור את הפתרון:

$$y_p{}' = -asinx + bcosx$$

$$y_p'' = -acosx - bsinx$$

$$y_p''' = asinx - bcosx$$

נציב במד"ר המקורית:

$$y''' - y' = 2\sin(x)$$

$$asinx - bcosx - (-asinx + bcosx) = 2\text{sinx}$$

השוואת מקדמים:

$$\left.\begin{matrix} sinx: & a-(-a)=2 \\ cosx: & -2b=0 \end{matrix}\right\} a=1, b=0$$

לסיכום הפתרון הפרטי:

$$y_p = cosx.$$

והפתרון הכללי של המשוואה:

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + cosx$$

לסיכום

פתרון כללי של משוואה עם מקדמים קבועים (כפי שראינו בתרגול הקודם) הוא:

$$e^{\alpha x}p_n(x)\sin(\beta x) \text{ או } e^{\alpha x}p_n(x)\cos(\beta x)$$

ולכן אם $g(x)$ היא באותה תבנית נציע פתרון דומה ל $g(x)$, דהיינו נשאיר את אותו אקספוננט כפי שהוא מופיע ב $g(x)$ נשאיר את אותה זווית (אם מופיעות הפונקציות sin או cos) ונכפיל בפולינום כללי מאותה דרגה שמופיעה ב $g(x)$.

בנוסף, אם לפ״א (השייך למשוואה ההומוגנית המתאימה) יש פתרון המתאים לתבנית שמופיעה ב $g(x)$, נכפיל ב X בחזקת הריבוי של אותו שורש.

נציע פתרון מהצורה	$g(x)$
$x^s a_n(x)$ S – הריבוי של 0 כשורש של הפ״א	$p_n(x)$
$x^s e^{\alpha x} a_n(x)$ S – הריבוי של α כשורש של הפ״א	$e^{\alpha x}p_n(x)$
$x^s e^{\alpha x}[a_n(x)\sin(\beta x)+b_n(x)\sin(\beta x)]$ S – הריבוי של $\alpha+i\beta$ כשורש של הפ״א	$e^{\alpha x}p_n(x)\sin(\beta x)\,, e^{\alpha x}p_n(x)\cos(\beta x)$

דוגמאות מסכמות

דוג׳ 1

מצאו פתרונות של המד״ר הבאה: $y''-7y'=(3-36x)e^{4x}$

פתרון

נתחיל מהמשוואה ההומוגנית: $y''-7y'=0$

הפ״א הוא $r^2-7r=0$ שורשי הפ״א הם $r=0,7$.

מכאן נקבל שפתרון המשוואה ההומוגנית הוא:

$$\boldsymbol{y_h=c_1+c_2e^{7x}}$$

שלב שני פתרון המשוואה הלא הומוגנית –נציע פתרון : $y_p = (ax+b)e^{4x}$.

נגזור את הפתרון :

$$y_p{}' = e^{4x}(4ax + 4b + a)$$

$$y_p'' = e^{4x}(16ax + 16b + 4a + 4a) = e^{4x}(16ax + 16b + 8a)$$

נציב במד"ר המקורית :

$$y'' - 7y' = (3 - 36x)e^{4x}$$

$$e^{4x}(16ax + 16b + 8a) - 7e^{4x}(4ax + 4b + a)' = (3 - 36x)e^{4x}$$

נחלק באקספוננט ונעשה השוואת מקדמים :

$$\left.\begin{array}{ll} x^0: & 16b + 8a - 28b - 7a = 3 \\ x: & 16a - 28a = -36 \end{array}\right\} a = 3, b = 0$$

לסיכום הפתרון הפרטי :

$$\boldsymbol{y_p = 3e^{4x}x}.$$

והפתרון הכללי של המשוואה :

$$\boldsymbol{y = y_h + y_p = c_1 + c_2e^{7x} + 3e^{4x}x}$$

דוג' 2

$$y'' - y' = x^2 + xe^x + e^x\sin(x)$$

פתרון

נתחיל מהמשוואה ההומוגנית : $y'' - y = 0$

הפ"א הוא $r^2 - 1 = 0$ שורשי הפ"א הם $r = -1,1$.

מכאן נקבל שפתרון המשוואה ההומוגנית הוא :

$$\boldsymbol{y_h = c_1e^x + c_2e^{-x}}$$

שלב שני נמצא פתרון פרטי נפרד לכל פונקציה באגף ימין.

עבור המשוואה : $y'' - y = x^2$ נציע פתרון שהוא פולינום מדרגה שניה : $y_{p1} = ax^2 + bx + c$.

נגזור את הפתרון: $y_{p1}' = 2ax + b,\ \ y_{p1}'' = 2a$

נציב במד"ר:

$$y'' - y = x^2$$

$$2a - (ax^2 + bx + c) = x^2$$

נשווה את מקדמי החזקות של x בשני צדי המשוואה:

$$\left.\begin{array}{ll} x^0: & 2a - c = 0 \\ x^1: & \quad -b = 0 \\ x^2: & \quad -a = 1 \end{array}\right\} a = -1, b = 0, c = -1$$

ומכאן הפתרון הפרטי הראשון הוא: $\boldsymbol{y_{p1} = -x^2 - 2}$.

עבור המשוואה: $y'' - y = xe^x$ נציע פתרון:

$$y_{p2} = x(ax + b)e^x = y_{p2} = (ax^2 + bx)e^x$$

נגזור את הפתרון:

$$y_{p2}' = e^x(ax^2 + bx + 2ax + b)$$

$$y_{p2}'' = e^x(ax^2 + bx + 2ax + b + 2ax + b + 2a) = e^x(ax^2 + bx + 4ax + 2b + 2a)$$

נציב במד"ר:

$$y'' - y = xe^x$$

$$e^x(ax^2 + bx + 4ax + 2b + 2a) - (ax^2 + bx)e^x = xe^x$$

נחלק באקספוננט ונעשה השוואת מקדמים:

$$\left.\begin{array}{ll} x^0: & 2a + 2b = 0 \\ x^1: & 4a + b - b = 1 \\ x^2: & \quad a - a = 1 \end{array}\right\} a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}$$

לסיכום הפתרון הפרטי:

$$\boldsymbol{y_p = (\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}x)e^x}.$$

והפתרון הכללי של המשוואה:

עבור המשוואה: $y'' - y = e^x \sin(x)$ נציע פתרון:

$$y_{p3} = e^x(a\cos x + \mathrm{b}\sin x)$$

נגזור את הפתרון:

$$y_{p3}{}' = e^x(a\cos x + \mathrm{b}\sin x - a\sin x + b\cos x)$$

$$y''_{p3} = e^x(a\cos x + \mathrm{b}\sin x - a\sin x + b\cos x - a\sin x + b\cos x - a\cos x - b\sin x)$$
$$= e^x(-2a\sin x + 2b\cos x)$$

נציב במד"ר:

$$y'' - y = e^x \sin(x)$$

$$e^x(-2a\sin x + 2b\cos x) - e^x(a\cos x + \mathrm{b}\sin x) = e^x \sin(x)$$

נחלק באקספוננט ונעשה השוואת מקדמים:

$$\left.\begin{array}{ll} sinx: & -2a - b = 1 \\ cosx: & 2b - a = 0 \end{array}\right\} a = -\frac{2}{5}, b = -\frac{1}{5}$$

לסיכום הפתרון הפרטי:

$$\boldsymbol{y_{p3} = (-\frac{2}{5}cosx - \frac{1}{5}sinx)e^x}.$$

והפתרון הכללי של המשוואה:

$$\boldsymbol{y = y_h + y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}}$$
$$\boldsymbol{= c_1e^x + c_2e^{-x} - x^2 - 2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{2}{5}cosx - \frac{1}{5}sinx\right)e^x}$$

פתרונות וידאו באתר

משוואות לא הומוגניות עם מקדמים לא קבועים – וריאציית הפרמטר

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

נמצא פתרון כללי למשוואה ההומוגנית

$$y_{\text{הומוגנית}} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4 \ldots + c_n y_n$$

ונחפש פתרון פרטי מהצורה

$$y_{\text{הומוגנית}} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + c_3(x) y_3 + c_4(x) y_4 \ldots + c_n(x) y_n$$

את $c_i(x)$ נמצא ע״י פתרון המערכת:

$$\begin{cases} c_1{}'(x) y_1 + c_2{}'(x) y_2 + c_3{}'(x) y_3 + c_4{}'(x) y_4 \ldots + c_n{}'(x) y_n = 0 \\ \vdots \\ c_1{}'(x) y_1{}^{(n-1)} + c_2{}'(x) y_2{}^{(n-1)} + c_3{}'(x) y_3{}^{(n-1)} + c_4{}'(x) y_4{}^{(n-1)} + \cdots + c_n{}'(x) y_n{}^{(n-1)} = g(x) \end{cases}$$

הערה: חשוב לנרמל את המשוואה.

דוג' 1

מצאו פתרון בתחום $(0, \frac{\pi}{2})$ למד״ר $y''' + y' = \tan(x)$

פתרון

נפתור את המשוואה ההומוגנית המתאימה.

$$y''' + y' = 0$$

פ״א:

$$r^3 + r = 0 \quad \rightarrow r = 0, \pm i$$

$$y_{\text{הומוגנית}} = c_1 + c_2 cosx + c_3 sinx$$

נציע פתרון פרטי מהצורה:

$$y_p = c_1(x) + c_2(x) cosx + c_3(x) sinx$$

ונפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} c_1'(\mathrm{x}) + c_2'(x)cosx + c_3'(x)sinx = 0 \\ -c_2'(x)sinx + c_3'(x)cosx = 0 \\ -c_2'(x)cosx - c_3'(x)sinx = \tan x \end{cases}$$

נחבר את המשוואה הראשונה והאחרונה ונקבל:

$$c_1'(\mathrm{x}) = tanx$$

ומכאן:

$$\boldsymbol{c_1(\mathrm{x}) = -\ln{(cosx)}}$$

אם נכפול את המשוואה השניה ב $cosx$ ואת השלישית ב $sinx$ ונחסר נקבל:

$$c_3'(\mathrm{x}) = \mathrm{sinx} \cdot tanx = \frac{sin^2x}{cosx} = \frac{1-cos^2x}{cosx} = \frac{1}{cosx} - cosx = \frac{cosx}{cos^2x} - cosx$$
$$= \frac{cosx}{1-sin^2x} - cosx$$

מסנן: $t = sinx \quad \to dt = cosxdx$ ונקבל:

$$c_3'(\mathrm{x}) = \frac{dt}{1-t^2} - cosxdx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt - cosxdx$$

$$\mathrm{c}_3(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}(-\ln|1-t| + \ln|1+t|) + sinx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + sinx = \boldsymbol{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+sinx}{1-sinx}\right| + sinx}$$

נשאר למצוא את $c_2(x)$, נשתמש בכלל קרמר:

$$w = \begin{vmatrix} 1 & cosx & sinx \\ 0 & -sinx & cosx \\ 0 & -cosx & -sinx \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -sinx & cosx \\ -cosx & -sinx \end{vmatrix} = sin^2x + cos^2x = 1$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & sinx \\ 0 & 0 & cosx \\ 0 & tanx & -sinx \end{vmatrix} = -sinx$$

$$c_2'(\mathrm{x}) = \frac{w_2}{w} = \frac{-sinx}{1} = -sinx$$

$$\boldsymbol{c_2 = cosx}$$

לסיכום הפתרון הפרטי הוא:

$$y_\mathrm{p} = -\ln(cosx) + \mathrm{cosx} \cdot cosx + [\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+sinx}{1-sinx}\right| + sinx] \cdot sinx$$

והפתרון הכללי של המד"ר:

$$\boldsymbol{y = c_1(x) + c_2(x)cosx + c_3(x)sinx - \ln(cosx) + cos^2x + [\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+sinx}{1-sinx}\right| + sinx]\cdot sin}$$

דוג' 2

מצאו פתרון למד"ר $y'' + y = \frac{2}{sinx} + e^{2x}$

פתרון

נפתור את המשוואה ההומוגנית המתאימה.

$$y'' + y = 0$$

פ"א:

$$\mathrm{r}^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow r = \pm i$$

$$y_{\text{הומוגנית}} = c_1cosx + c_2sinx$$

את החלק הלא הומוגני נחלק לשניים את החלק האקספוננציאלי נפתור בעזרת השוואת מקדמים את החלק השני נפתור ע"י וריאציית הפרמטר.

$$y'' + y = e^{2x}$$

$$y_{\mathrm{p1}} = ae^{2x}, y'_{\mathrm{p1}} = 2ae^{2x}, y''_{\mathrm{p1}} = 4ae^{2x}$$

נציב במד"ר:

$$y'' + y = e^{2x}$$

$$4ae^{2x} + ae^{2x} = e^{2x} \quad \rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$\boldsymbol{y_{\mathrm{p1}} = \frac{1}{5}e^{2x}}$$

החלק השני של המשוואה לא הומוגנית:

$$y'' + y = \frac{2}{sin^3x}$$

נציע פתרון מהצורה:

$$y_{\mathrm{p2}} = c_1(x)cosx + c_2(x)sinx$$

ונפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} c_1'(x)cosx + c_2'(x)sinx = 0 \quad /\cdot cosx \\ -c_1'(x)sinx + c_2'(x)cosx = \dfrac{2}{sin^3x} \quad /\cdot sinx \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)cos^2x + c_2'(x)sinxcosx = 0 \\ -c_1'(x)sin^2x + c_2'(x)cosxsinx = \dfrac{2}{sin^2x} \end{cases}$$

נחסר את המשוואות ונקבל:

$$c_1'(\mathrm{x}) = -\frac{2}{sin^2x}$$

ומכאן:

$$\boldsymbol{c_1(\mathrm{x}) = 2cotx}$$

נעבור ל $c_2(x)$:

$$c_2'(x) = \frac{2\mathrm{cosx}}{sin^3x}$$

מסנן: $t = sinx \quad \to dt = cosxdx$ ונקבל:

$$c_3'(\mathrm{x}) = \frac{2dt}{t^3}$$

$$\boldsymbol{c_3(\mathrm{x}) = -\frac{2}{2t^2} = -\frac{1}{sin^2x}}$$

לסיכום הפתרון הפרטי הוא:

$$\boldsymbol{y_p = 2cotxcosx - \frac{1}{sin^2x}\mathrm{sinx} = \frac{2cos^2x - 1}{sinx}}$$

והפתרון הכללי של המד"ר:

$$\boldsymbol{y = c_1cosx + c_2sinx + \frac{1}{5}e^{2x} + \frac{2cos^2x - 1}{sinx}}$$

דוג' 3

נתונה המד"ר:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = xe^{-x}$$

נתון כי $y_1(x) = x, y_2(x) = x^2$ פתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה. יהי $y(x)$ פתרון המד"ר המקיים את ת"ה : $y(1) = \frac{1}{e}, y'(1) = 0$.

חשבו = $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

פתרון

שאלות ממבחנים

.1

נתונה המשוואה $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ בתחום $x > 0$. אז פתרון פרטי של משוואה הוא :

א. $y_{pr} = ln\, x\, (e^x - 1)$

ב. $y_{pr} = xe^{-x}(1 + ln\, x)$

ג. $y_{pr} = xe^x(-1 + ln\, x)$

ד. $y_{pr} = e^x\, ln\, x\, (x - 1)$

ה. $y_{pr} = e^{-x}\, ln\, x\, (1 - x)$

תשובה נכונה : ג.