.4

נתונה הפונקציה

$$f(x,y,z)=\frac{ln\,(x^2+y^2+x^2+z^2-1)}{x+y+z}$$

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא תחום פשוט קשר וקשיר

הטענה לא נכונה

<u>עקומים ב- $\mathbb{R}^3$ (פרמטריזציה של עקום)</u>

<u>הגדרה</u>: נתונה פונקציה: $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ (קטע חסום או לא חסום).

למשל: $I=[0,\infty)$ או $I=\mathbb{R}$ או $I=[a,b]$.

העקום מתואר כך: $\gamma(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ והמשיק לעקום זה הוא:
$\gamma'(t)=\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)$.

<u>הגדרה</u>: עקום נקרא חלק אם $x(t),y(t),z(t)$ גזירות בתחום I וגם $\gamma'(t)\neq\vec{0}$ לכל $t\in I$.

<u>תרגילים</u>:

1. נתון עקום המתואר ע"י $\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ כאשר:

$$x(t)=8t^2-t,\qquad y(t)=4t+6,\quad z(t)=t^3-6t$$

והנקודה (9,2,5) שנמצאת על העקום הנ"ל.

א) מצא ערך פרמטרי t_0 עבורו מתקבלת נקודה זו.

ב) מהו הוקטור המשיק לעקום ב-t_0.

ג) מצאו משוואת מישור הניצב לעקום ב-t_0

<u>פתרון</u>:

א) נשווה למשל את רכיב ה-y של $(9,2,5)$ ל-$y(t)$ ונקבל: $4t+6=2$ מכאן $t=-1$.

כעת אם נציב $t=-1$ ב-$x(t),z(t)$ נקבל: $x(-1)=9,\ \ z(-1)=5$ ולכן זהו ה-t_0 המתאים.

ב) נגזור את העקום ונקבל: $\gamma'(t)=(16t-1,4,3t^2-6)$ כעת נציב $t=-1$ בנגזרת העקום ונקבל: $\gamma'(-1)=(-17,4,-3)$ ולכן זהו הוקטור המשיק לעקום בנקודה $t_0=-1$.

ג) הוקטור בסעיף ב' הוא הנורמל למישור (כי זהו וקטור שמשיק לעקום ולכן ניצב למישור)

מכאן כי משוואת המישור היא מהצורה: $-17x+4y-3z+d=0$.

כעת כדי למצוא את d נציב את הנקודה $(9,2,5)$ שנמצאת על המישור הנ"ל ונקבל את משוואת המישור

הניצב לעקום ב-$t_0=-1$ שהיא: $-17x+4y-3z+160=0$.

2. נתון העקום: $x(t)=e^{t^2-t},\ \ \ y(t)=ln(t),\ \ \ z(t)=t^3+2$.

א) עבור אילו ערכי t העקום מוגדר?

ב) עבור אילו ערכי t_0 מתקבלת הנקודה $(1,0,3)$?

ג) מהו הוקטור המשיק לעקום ב-t_0 שמצאתם בסעיף ב'?

ד) מהי משוואת המישור הניצב לעקום ב-t_0 העובר דרך הנקודה $(1,0,3)$?

פתרון

3.

עקום שאין לו משיק בנקודה מסוימת.

ציקלואידה:

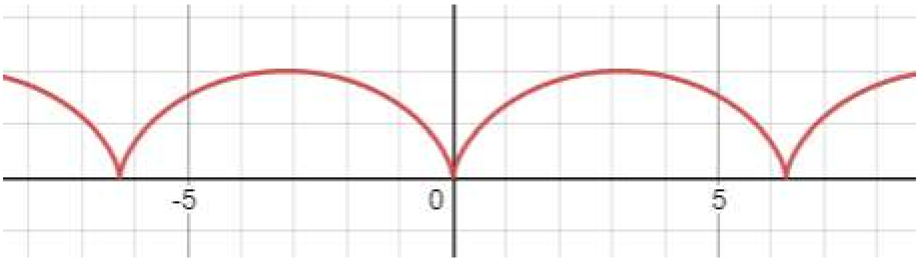
$$x(t)=t-sint,\qquad y(t)=1-cost$$

$$\gamma'(t)=(1-cost,sint)$$

בנקודות בהן $t=2\pi K$ נקבל

$$\gamma'(t=2\pi K)=(0,0)$$

כלומר התקבל וקטור האפס, לפיכך אין משיק בנקודות אלו.



.4

הראו שהמשיק לעקום $(3t, 3t^2, 2t^3)$ יוצר זווית קבועה עם הישר $y = z - x = 0$

פתרון

.5

L עקום החיתוך של המשטחים

$$\begin{cases} x^2 - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2} \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

נתון כי הנקודה $(1,1,1)$ שייכת לעקום זה.

א) מצאו את הישר המשיק לעקום בנקודה הנ"ל.

ב) מצאו משוואת מישור הניצב לעקום בנקודה הנ"ל.

פתרון

שאלות ממבחנים – פרמטריזציה של עקום

.1

נגדיר

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = 1 + \ln(2 + t) \\ z(t) = a(t^3 - t) + 2t^2 \end{cases}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 + t^2 \\ z(t) = 1 + e^t \end{cases}$$

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = t^3 \\ z(t) = 2sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases}$$

כאשר $t \in R$ ו - a קבוע נתון.

א.   בדקו ששלושת העקומים עוברים דרך הנקודה $(0,12)$.

פתרון

ב. אם $\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t)$ מוכלים במשטח בעל משיור משיק בנקודה $(0,1,2)$ מצאו את ערכו של a.

פתרון

.2

א. המשטח $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2=1+z^2\}$ מכיל ישר העובר בנקודה $(2,12)$.

הטענה נכונה

ב.   יהי c קבוע כלשהו. ויהי E החיתוך של המישור $z=c$ עם המשטח S. הראו ש – E עקום ורשמו הצגה פרמטרית שלו.

פתרון

נגזרות חלקיות

הגדרה: בהינתן $f(x,y)$ המוגדרת ב-(x_0,y_0) ובסביבתה,

נגדיר נגזרת חלקית לפי x בנקודה (x_0,y_0) באופן הבא:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

ונגזרת חלקית לפי y בנקודה (x_0,y_0) באופן הבא:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$

הערות:

1) אין קשר בין רציפות הפונקציה f לבין קיום הנגזרות החלקיות שלה.

2) $f_x(x,y)$ ו-$f_y(x,y)$ הן פונקציות ב-2 משתנים.

3) הגדרה: אם F גזירה (דיפ׳) ב-p_0 נסמן: $\vec{\nabla}F(p_0)=grad\,F(p_0)=\left(F_x(p_0),F_y(p_0)\right)$.

הערה: לוקטור הגרדיאנט אין משמעות אם f לא גזירה.

תרגילים:

שאלה: כיצד נחשב נגזרת חלקית שלא לפי ההגדרה?

תשובה: אם $f(x,y)$ מוגדרת בתחום פתוח אזי הנגזרת החלקית לפי x היא פשוט גזירה (ע״פ כללי נגזרת)

לפי x כאשר מתייחסים ל-y כאל קבוע ובאופן דומה עבור הנגזרת החלקית לפי y (שם נתייחס ל-x כאל קבוע).

למשל עבור הפונקציה: $f(x,y)=sin(xy)+x^2y$ נקבל:

$$f_x(x,y)=ycos(xy)+2xy,\quad f_y(x,y)=xcos(xy)+x^2$$

בתחום מפוצל נפתור באופן הבא:

1. תהי $f(x,y)=\begin{cases}0 & (0,0)\\ \frac{xsin(y^2)}{x^2+y^2} & \text{אחרת}\end{cases}$

א) בדקו רציפות בראשית.

ב) חשבו f_x בכל המישור.

ג) האם f_x רציפה בראשית?

<u>פתרון:</u>

א) נעבור לקואורדינטות קוטביות (פולריות):

$$|f(x,y)| = |f(rcos\alpha, rsin\alpha)| = \left|\frac{rcos\alpha \cdot sin(r^2sin^2\alpha)}{r^2}\right|$$

$$\left|\frac{rcos\alpha \cdot sin(r^2sin^2\alpha)}{r^2sin^2\alpha} \cdot sin^2\alpha\right| = \left|rcos\alpha sin^2\alpha \cdot \underbrace{\frac{sin(r^2sin^2\alpha)}{r^2sin^2\alpha}}_{\substack{\text{שואף ל-}1 \\ \text{כאשר } r\to 0}}\right|$$

הפוקנציה $G(\theta) = cos\alpha sin^2\alpha$ חסומה ו- $F(r) = r \to 0$ כאשר $r \to 0$ ולכן הגבול הוא 0

ולכן הפונקציה רציפה בראשית הצירים.

ב) בכל המישור פרט לראשית, מתקבל תחום פתוח ולכן נוכל לחשב בקלות:

$$f_x = \frac{sin(y^2)(x^2+y^2) - 2x \cdot xsin(y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{sin(y^2)(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

בראשית הצירים נחשב את f_x לפי ההגדרה:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{hsin(0^2)}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

בסה"כ קיבלנו:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 0 & (0,0) \\ \dfrac{(y^2-x^2)sin(y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{אחרת} \end{cases}$$

ג) נבדוק את רציפות f_x נציע מסלול מהצורה $y = kx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(y^2-x^2)\,sin(y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(k^2x^2-x^2)\,sin(k^2x^2)}{(x^2+k^2x^2)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2(k^2-1)(k^2x^2)}{x^4(1+k^2)^2} \cdot \underbrace{\frac{sin(k^2x^2)}{k^2x^2}}_{\substack{\text{שואף ל-}1 \\ \text{כאשר } x\to 0}}\right) = \frac{(k^2-1)k^2}{(k^2+1)^2}$$

קיבלנו גבול שתלוי ב-k ולכן הגבול של $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ לא קיים, ומכאן ש-$f_x(x,y)$ לא רציפה בראשית.

2. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & (0,0)\\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{אחרת}\end{cases}$$

הפונקציה f לא רציפה (ניתן להראות זאת בקלות ע"י המסלול $y=kx$ או ע"י קואורדינטות פולריות).

בכל נקודה שאיננה ראשית הצירים נקבל:

$$f_x(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-2x\cdot xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^2+y^2-2x^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

בצורה סימטרית מכיוון ש-$f(x,y)=f(y,x)$ נובע כי $f_y(x,y)=f_x(y,x)$.

כלומר:

$$f_y(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

בראשית הצירים נחשב את הנגזרות החלקיות לפי x ולפי y

ע"פ ההגדרה ונקבל:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0$$
$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0$$

הנגזרות החלקיות של הפונקציה לפי x ולפי y בראשית הצירים קיימות ושוות ל-0.

<u>הערה:</u>

מהתרגילים הקודמים ניתן לראות ש**אין קשר** בין **רציפות** בנקודה **לנגזרות** $\boldsymbol{f_x}$ **ו-**$\boldsymbol{f_y}$ בנקודה.

שאלות ממבחנים – נגזרות חלקיות

.1

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & (0,0)\\ \dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{אחרת}\end{cases}$$

א. חשבו הנגזרות $\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}$ בכל נקודה ב- R^2 כולל הראשית.

ב. הראו שהנגזרות $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ שונות זו מזו בראשית.

ג. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

כל אחת מהפונקציות הבאות $u=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),v=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ רציפה בראשית.

פתרון

.2

תהי $f(x,y)$ גזירה בכל R^2 כך שמתקיים $\forall(x,y)\ f(x,y)=f(-x,-y)$

חשבו את $\nabla f(0,0)$.

פתרון

3.

תהי $f(x,y)$ בעלת נ"ח שהן חסומות בסביבת הראשית . הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה בראשית.

פתרון

4. נתונה הפונקציה

$$f(x,y) = x + y \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

א. חשבו את שתי הנ"ח מסדר ראשון בכל נקודה במישור.
ב. האם שתי הנ"ח רציפות בראשית.

פתרון

שאלות נוספות

.1

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|+y|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

איזו מהטענות הבאות היא הטענה הנכונה?

- הפונקציה הנתונה רציפה בנקודה $(0,0)$ ומתקיים: $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.
- הפונקציה הנתונה רציפה בנקודה $(0,0)$ אך לא קיימות לה נגזרות חלקיות בנקודה הזו.
- הפונקציה הנתונה **אינה** רציפה בנקודה $(0,0)$ ומתקיים: $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.
- הפונקציה הנתונה **אינה** רציפה בנקודה $(0,0)$ וגם **לא** קיימות לה נגזרות חלקיות בנקודה הזו.
- לפונקציה הנתונה לא קיימות נגזרות חלקיות בכל $\mathbb{R}^2$ (כלומר, באף נקודה).

.2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5-2x^2y^2}{5x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א. האם הפונקציה רציפה ב - $(0,0)$?

ב. האם הנגזרת $f'_x(0,0)$ קיימת? אם לא הסבירו מדוע, אם כן, חשבו אותה.

.3

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+2y^3-x}{\sqrt{y^6+x^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

איזו מהטענות הבאות היא הטענה הנכונה?

- הפונקציה הנתונה רציפה בנקודה $(0,0)$ ומתקיים: $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.

- הפונקציה הנתונה רציפה בנקודה $(0,0)$ אך לא קיימות לה נגזרות חלקיות בנקודה הזו.
- הפונקציה הנתונה **אינה** רציפה בנקודה $(0,0)$ ומתקיים : $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.
- הפונקציה הנתונה **אינה** רציפה בנקודה $(0,0)$ וגם **לא** קיימות לה נגזרות חלקיות בנקודה הזו.
- לפונקציה הנתונה לא קיימות נגזרות חלקיות בכל $\mathbb{R}^2$ (כלומר, באף נקודה).

4.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin((x+y)^2)}{x+y} & x \neq -y \\ 0 & x = -y \end{cases}$$

א. באילו נקודות במישור הפונקציה רציפה?

ב. חשבו את הנגזרות החלקיות בכל נקודה בה הן קיימות או הסבירו מדוע אינן קיימות.

ג. האם הפונקציה גזירה (דיפרנציאבילית) בכל המישור?

5.

תהי $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ המוגדרת בכל $\mathbb{R}^2$ אזי :

א. $f'_x(0,0) = 0, f'_y(0,0) = 0$

ב. $f'_x(0,0) = 0, f'_y(0,0) \neq 0$

ג. $f'_x(0,0) \neq 0, f'_y(0,0) = 0$

ד. $f'_x(0,0),\ f'_y(0,0)$ לא קיימות.

תשובה נכונה : א'.